Université du Québec à Montréal, **Fall 2015**
Département de Mathématiques

PLAN DE COURS/SYLLABUS (Tentative)

MAT8882 groupe 10 Séminaire

GROUPES DE RÉFLEXIONS ET GROUPES DE COXETER
REFLECTION GROUPS AND COXETER GROUPS

Lundi et mercredi 10h30-12h, local PK4323

Professeur : Christophe Hohlweg
Bureau : PK-4230 (lundi et mercredi de 15h15 à 16h30 de préférence)
Téléphone : 514-987-3000 poste 2566
Courriel : hohlweg.christophe@uqam.ca
Page internet du cours : http://hohlweg.math.uqam.ca/fr/enseignement/2015/MAT8882

DESCRIPTION DU COURS : Ce cours est une introduction aux groupes de réflexions et aux groupes de Coxeter. Les groupes de Coxeter apparaissent par exemple comme les groupes discrets engendrés par des réflexions sur un espace euclidien, affine ou bien hyperbolique. Ils sont aussi naturellement associés aux algèbres de Lie ou de Kac-Moody via les systèmes de racines.

Nous étudierons ces groupes du point de vue de l'algèbre, de la combinatoire ainsi que de celui de la géométrie. Le premier point de vue que l'on adoptera sera géométrique : nous montrerons que tous les groupes discret de réflexions sur un espaces euclidiens sont finis et sont de Coxeter, puis nous traiterons les cas de la géométrie affine et de la géométrie hyperbolique. Ensuite, nous parlerons des représentations géométriques de ces groupes en général et en particulier du lien entre hyperplans de réflexions, systèmes de racines, racines limites et cônes imaginaires. Enfin, si le temps le permet, nous aborderons l'un ou l'autre des nombreux problèmes ouverts concernant ces groupes.

This class will be taught in English. Homework and presentations can be done in English or in French.

This course is an introductory course to reflection and Coxeter groups. For instance, Coxeter groups appear as discrete groups generated by reflections in spherical, Euclidean or hyperbolic geometry. They are also naturally associated to Lie or Kac-Moody algebras via their root systems. We will study these groups from the point of view of algebra, combinatorics and also geometry. We will first adopt a geometric point of view and show that discrete reflection groups in spherical geometry are finite and are Coxeter groups. Then we will discuss the cases of Euclidean and hyperbolic geometry. Thereafter we will talk about their geometric representations in general and in particular of the link between reflecting hyperplanes, root systems, limit roots and imaginary cones. Finally, if times allows, we will discuss some of the many open problems concerning these groups.

OBJECTIF DU COURS :

Le but de ce cours est multiple : (1) de donner une connaissance suffisamment large de ces groupes, d'un point de vue algébrique, géométrique et combinatoire ; (2) de mettre en pratique les connaissances acquise au baccalauréat (algèbre et géométrie, topologie) ; (3) d'aborder l'un ou l'autre des nombreux questions ou problèmes ouverts concernant ces groupes.

PLAN DÉTAILLÉ (TENTATIVE) :

Cours 1 :

* Présentation du plan de cours et de l'entente d'évaluation.

* Introduction (Rappels : Espaces vectoriels euclidiens de dimension finie, isométrie, réflexions, décomposition des isométries - théorème de Cartan-Dieudonné pour les espaces euclidiens, groupe linéaire et orthogonal.) Groupes engendrés par des réflexions – GRF – et Groupes de Coxeter ; problèmes de classification.

BLOC 1 : GROUPES DE RÉFLEXION FINIS ET GROUPES DE COXETER
c.f. Humphreys §1.1–1.8 & 5.1–5.2 et Björner-Brenti §1.5

Cours 2, 3 et 4 : GRF, exemples : les groupes diédraux et leur présentation par générateurs et relations. Groupes symétriques comme GRF. Systèmes de racines finis. Racines positives et simples, générateurs simples d'un GRF, présentations par générateurs et relations (lire la preuve dans livre de Björner-Brenti).

Cours 5 à 6 : Groupes et graphes de Coxeter : mots, relations, longueur. Ordre faible sur le graphe de Cayley. Les groupes engendrés par des involutions vérifiant les propriétés d'échange ou de réduction sont des groupes de Coxeter ; énoncé de la réciproque. Ensembles d'inversion des éléments d'un groupe de réflexions fini et longueur. Les groupes de réflexions finis vérifient les propriétés d'échange et de réduction.

Cours 7 et 8 : Corrigé feuille d'exercices 1.

BLOC 2 : GROUPES DE COXETER ET GROUPES DISCRETS DE RÉFLEXIONS
c.f. Humphreys §5.3–5.8, Hohlweg-Labbé-Ripoll & Dyer-Hohlweg-Ripoll

Cours 9 à 10 Espace quadratique : groupes des isométries et réflexions, Théorème de Cartan Dieudonné. Notion de topologie des groupes. Groupe discret engendré par des $B-$réflexions, exemple des groupes diédraux discrets, condition de finitude en fonction de la signature.

Cours 11 à 12 Représentations géométriques des groupes de Coxeter sur un espace quadratique, systèmes de racines avec base et groupe discret engendrés, représentation projective des systèmes de racines. Interprétation géométrique de la longueur, sous-groupes paraboliques standard et irréductibilité, Classification des GRF (énoncé). Propriété forte d'échange et caractérisation des groupes de Coxeter avec les propriétés d'échange ou de réduction. **Le devoir est distribué en classe (cours 11).**

Cours 13 à 14 Ensemble d'accumulation des racines dans la représentation projective, cône imaginaire, propriétés fractales et problèmes ouverts.

Cours 15 : Réflexions : hyperplans de réflexions et dual. Modèles de la géométrie sphérique, euclidienne affine et hyperbolique à partir d'espace quadratique, modèle affine dans le cas de signature $(n-1,0,1)$. Groupes discrets de réflexions : exemples, arrangement d'hyperplans et systèmes de racines, présentation par générateurs et relations, discussion sur les classifications. (c.f. Humphreys §4, Vinberg-Shvartsman et Hohlweg-Préaux-Ripoll)

Cours 16 et 17 : **Devoir à rendre au cours 16.** Corrigé feuille d'exercices 2.

BLOC 3 : PROBLÈMES ACTUELLES ET STRUCTURES CONNEXES AUX GROUPES DE COXETER
c.f. Dyer-Hohlweg & Brenti–Björner §4.7

Cours 18 à 21 Ordre faible et enveloppe convexe : problèmes ouverts. Racines minimales, ordre de dominance et ordre faible sur les racines, automates et problèmes ouverts

Cours 22–23 : Présentation des étudiants au doctorat. PhD students presentation.

Cours 24 : Corrigé feuille d'exercices 3.

Cours 25 : Journée à la Réunion d'hiver de la Société Mathématiques du Canada (SMC) sur les groupes de Coxeter.

Cours 26–28 : Examen final.

CONTENU DES APPRENTISSAGES :

Chaque séance du cours fera l'objet d'un exposé durant lequel les questions et discussions qui'elles engendrent sont plus que le bienvenu. Les dernières séances de chaque bloc seront dédiées à la correction d'exercices, qui seront distribués en classe au moins 10 jours à l'avance.

BIBLIOGRAPHIE :

— J. E. HUMPHREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in Adv. Mathematics **29** (1990). (Chapitres 5, 1 et 4)
— C. Hohlweg, J. P. Labbé and V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups*, *Canadian. J. of Math.* **66**, (2014), 323–353.
— C. Hohlweg, J.-P. Préaux and V. Ripoll, *On the Limit Set of Root Systems of Coxeter Groups acting on Lorentzian spaces* (2013, arXiv :1305.0052).
— M. Dyer and C. Hohlweg, *Small roots, low elements, and the weak order in Coxeter groups* (2015, arXiv :1505.02058)

Nous nous insprirerons aussi de :

— A. BJÖRNER ET F. BRENTI, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate texts in Mathematics **231**, Springer (2005).

— Chapter 5 in È. B. Vinberg and O. V. Shvartsman. Discrete groups of motions of spaces of constant curvature. In *Geometry, II*, volume 29 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 139–248. Springer, Berlin, 1993.
— M. Dyer, C. Hohlweg and V. Ripoll, *Imaginary Cones and Limit Roots in Infinite Coxeter Groups* (2013, arXiv :1303.6710)

Evaluation

CRITÈRES D'ÉVALUATIONS DES TRAVAUX ÉCRITS :

— Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs)
— Qualité du français écrit (or the quality of English if this language is chosen for writing the text), bon usage du langage et des symboles mathématiques
— Respect des consignes propres au devoir.
— **Chaque jour de retard entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.**
— **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ / NO DRAFT WILL BE ACCEPTED.**
— Voir le règlement concernant le plagiat à la fin de ce texte

POUR LES ÉTUDIANTS À LA MAITRISE

— **Un devoir : 40%**

– Ce devoir sera distribué le lundi 19 octobre en classe. – Ce devoir sera à remettre le mercredi 4 novembre en classe.

Ce devoir vise les objectifs suivants :

1. Apprendre à écrire des mathématiques, à résoudre des problèmes, et à en communiquer clairement la solution.
2. Apprendre à rédiger des articles de qualité professionnelle.

Consignes :

— Le nombre de page maximum permis sera spécifié lors de la districution de l'énoncé. Ce devoir DEVRA être rédigé sous LaTeXet imprimé sur du papier format *lettre.*

— **Participation, présence et présentation de la solution d'un ou d'exercices : 30%**

* Durée : 40 minutes à une heure.
* Lieu et date : Salle de classe, la date sera déterminé au moins une semaine à l'avance.

Critères d'évaluations :

— présence et participation au cours.

— Clarté de l'expression orale et exactitude du raisonnement amenant à la solution
— Qualité de la présentation au tableau.

FOR STUDENT AT THE PHD LEVEL

— **An tow pages abstract, a survey and a presentation on a subject connected to Reflection groups and Coxeter groups : 10% for the extended abstract, 30% for the survey and 30% for the presentation**

– In preparation for the survey, a two pages extended abstract describing the subject of the survey and of the talk, with references, will have to be handed on November 11th, 2015.
– The presentations will take place on November 25 and 30. These classes may be of 2 hours (10am to 12am).
– The survey will have to be handed in on December 9.
– The length of the survey will have to be between 7 and 12 pages.
– The time for the presentation is 50 minutes.

— The survey and abstract will have to be written with LaTeX, within the class of document *amsart* and printed on a letter format paper.

Criteria for grading the conference :
— The quality of the presentation, in particular the respect of the 50 minutes allowed and of the speed of the speech.
— Clarity of the mathematics that are presented

POUR TOUS

— **Un examen final récapitulatif : 30%**

* Durée : deux heures (10h00-12h00)
* Lieu et date : mercredi 9 décembre de 10h00 à 12h00 au PK-4323.
* Vous rendrez ce que vous avez fait en classe au bout des deux heures, et le reste des questions sera à traiter en devoir à rendre le mercredi 16 décembre à 12h00 lors du dernier cours en classe, tout retard entrainera la perte de 10% par jour à compter du 16 décembre à 12h00. Si vous le désirez, vous pouvez traiter à nouveau les questions que vous aviez traitées en classe. Le nombre maximal de pages sera précisé lors de l'examen.
* Le lundi 14 décembre je serais disponible dans la salle du cours afin de répondre à d'éventuelles questions **précises** ou bien afin de jeter un coup d'oeil informel à votre travail et ainsi vous suggérer des pistes afin de le parfaire pour le 16 décembre.
Dans le cas de cet examen, calculatrice, ordinateur, téléphone, tablette etc. est interdite. L'utilisation de vos notes de cours est permises.

PLAGIAT

Règlement no 18 sur les infractions de nature académique

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie ou falsification de document commis par une étudiante, un étudiant, de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen ou d'un travail faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constituent une infraction au sens de ce règlement

La liste non limitative des infractions est définie comme suit :

- la substitution de personnes ;
- l'utilisation totale ou partielle du texte d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence ;
- la transmission d'un travail pour fins d'évaluation alors qu'il constitue essentiellement un travail qui a déjà été transmis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant ;
- l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen ou de tout autre document ou matériel non autorisés, ou encore d'une évaluation non méritée ;
- la possession ou l'utilisation, avant ou pendant un examen, de tout document non autorisé ;
- l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen d'une autre personne ;
- l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle ;
- la falsification d'un document, notamment d'un document transmis par l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances ;
- la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Les sanctions reliées à ces infractions sont précisées à l'article 3 du Règlement no 18

Pour plus d'information sur les infractions académiques et comment les prévenir : http://r18.uqam.ca/