Université du Québec à Montréal, **Eté 2008**
Département de Mathématiques

PLAN DE COURS (Tentative)
MAT8881 groupe 10 Séminaire de maîtrise en mathématique
Introduction aux groupes de Coxeter

Les cours débutent le mardi 6 mai à 11h et finiront le jeudi 19 juin à 15h30
Les Mardi et Jeudi de 11h à 12h30 et de 14h à 15h30, local PK-4323.
Professeur : Christophe HOHLWEG
(bureau : PK-4230, tél : 514-987-3000, poste 2566, hohlweg.christophe@uqam.ca)

Description du Cours : Ce cours est un cours d'introduction aux groupes de Coxeter.

Les groupes de Coxeter apparaissent naturellement comme un ensemble de symétries de polyèdres réguliers, et, par conséquent, jouent un rôle important en cristallographie. Les groupes de Coxeter aparaissent aussi naturellement dans presque tous les domaines des mathématiques: théorie de Lie, algèbre commutative, théorie de la représentation, topologie de basse dimension, combinatoire et la théorie des groupes géométrique. Les premiers exemples de ces groupes sont les groupes symétriques et les groupes diédraux.

Objectif du Cours :

Le but est de donner tout étudiant de maîtrise une connaissance suffisamment large de ces groupes, d'un point de vue algébrique, géométrique et combinatoire, mais aussi de mettre en pratique les connaissances acquise au baccalauréat (algèbre, géométrie, topologie). Le problème choisi pour aborder la théorie des groupes de Coxeter est la classification des groupes finis engendrés par des réflexions sur un espace vectoriel réel euclidien. Nous parlerons aussi de systèmes de racines, du théorme de Chevalley-Sheppard-Todd, de la présentation par générateurs et relations, des complexes et éventails de Coxeter, de l'ordre de Bruhat. Ce cours est ouvert aux étudiants de premier cycle (l'autorisation du professeur est requise), mais aussi aux étudiants de doctorat qui ne connaissent pas ce sujet. Les conditions préalables sont les cours d'algèbre, de géométrie et d'algèbre linéaire au niveau baccalauréat. Autant que possible, je rappellerai toutes les notions prérequises.

PLAN DÉTAILLÉ :

Semaine 1 Espaces vectoriels euclidiens de dimension finie, isométrie, réflexions, décomposition des isométries. topologie canonique, groupe liéaire et orthogonal. Groupes engendrés par des réflexions, exemples (groupes diédraux, groupes symétriques, groupes hyper-octaédraux, groupe de type D).

Semaine 2 Présentation des groupes par générateurs et relations (groupes libres, propriété universelle, générateurs et relations), exemples.

Semaine 3 Groupes de Coxeter, généralités (définition, matrice de Coxeter, graphe de Coxeter, fonction longueur, signature). Un bref aperçu de la théorie de la représentation des groupes.

Semaine 4 Représentation géométrique, système de racines, version géométrique de la longueur, caractérisation des groupes de Coxeter (condition d'échange).

Semaine 5 Domaine fondamental, complexe et éventail de Coxeter, sous-groupes paraboliques, représentants de longueur minimale des classes modulo un sous-groupe parabolique, ensemble des refléxions.

Semaine 6 Groupes de Coxeter finis (classification), groupes de Coxeter affines et hyperboliques, groupe de Weyl.

Semaine 7 Théorie des invariants, Théorème de Chevalley.

CONTENU DES APPRENTISSAGES :

Chaque séance du cours fera l'objet d'un exposé avec questions et discussions.

Chaque semaine, une feuille d'exercices sera distribuée et la séance du mardi matin suivant sera dédiée à la correction de problèmes.

EVALUATION :

1. 2 devoirs.
   - Le premier sera distribué le jeudi 22 mai et sera à remettre le jeudi 12 juin (40%).
   - Le dernier sera distribué le jeudi 19 juin et sera à remettre le lundi 14 juillet **au plus tard** (50%).
2. Corrections de problèmes au tableau (10%). La justesse des solutions ainsi que la présentation seront évaluées. Exercice au choix parmis les problèmes donnés.

RÈGLES ET CRITÈRES D'ÉVALUATIONS : Sera pris en compte : L'exactitude du raisonnement amenant à la solution; l'exactitude des calculs; jusqu'à 20% pourra être attribué à la qualité de la rédaction (clarté de la rédaction, bon usage du langage et des symboles mathématiques, qualité du français).

BIBLIOGRAPHIE :

Principalement :

J. E. HUMPHREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in Adv. Mathematics **29** (1990).

Je recommande aussi les livres suivants :

N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6*, Masson (1981).

C. T. BENSON ET L. C. GROVE, *Finite Reflections Groups, second edition*, Graduate texts in Mathematics **99**, Springer (1985).

M. GECK ET G. PFEIFFER, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*, London Math. Soc. Monographs New Series **21**, Oxford Science Publ. (2000).

A. BJÖRNER ET F. BRENTI, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate texts in Mathematics **231**, Springer (2005).

Et pour les "généralités" :

MICHÈLE AUDIN, *Géométrie*, Collection Ens. Sup. Mathématiques, EDP Sciences 2006. (Chapitre I–V, une partie des chapitres VI et VII).

ROBERT BÉDART, *Notes de cours MAT7400 Représentations des Groupes*,
`http://www.lacim.uqam.ca/ bedard/notes/recueil_MAT7400.html`

JOSETTE CALAIS, *Eléments de théorie des groupes*, PUF Mathématiques.