**Université du Québec à Montréal,** **Automne 2014**
*Département de Mathématiques*

# PLAN DE COURS (Tentative)
## MAT8881 groupe 10 Séminaire
### Groupes de réflexions et groupes de Coxeter
### Lundi 10h30-12h, local PK5333 et mercredi 15h30-17h00, local PK-4323

**Professeur :** Christophe Hohlweg
**Bureau :** PK-4230 (lundi de 15h30 à 16h30, les mercredis de 10h30 à 12h00)
**Téléphone :** 514-987-3000 poste 2566
**Courriel :** hohlweg.christophe@uqam.ca
**Page internet du cours :** http://hohlweg.math.uqam.ca/?p=985

Description du Cours : Ce cours est une introduction aux groupes de réflexions et aux groupes de Coxeter. Les groupes de Coxeter apparaissent par exemple comme les groupes discrets engendrés par des réflexions sur un espace euclidien, affine ou bien hyperbolique. Il sont aussi naturellement associés aux algèbres de Lie ou de Kac-Moody via les systèmes de racines.

Nous étudierons ces groupes du point de vue de l'algèbre, de la combinatoire ainsi que de celui de la géométrie. Le premier point de vue que l'on adoptera sera géométrique : nous montrerons que tous les groupes discrets de réflexions sur un espaces euclidien sont finis et sont de Coxeter, puis nous traiterons les cas de la géométrie affine et de la géométrie hyperbolique. Ensuite, nous parlerons des représentations géométriques de ces groupes en général et en particulier du lien entre hyperplans de réflexion, systèmes de racines, racines limites et cônes imaginaires. Si le temps le permet, nous aborderons l'un ou l'autre des nombreux problèmes ouverts concernant ces groupes. Enfin, nous aurons la visite de Vincent Pilaud, chercheur à l'École Polytechnique en France, qui nous parlera de polytopes de briques.

Objectif du Cours :

Le but de ce cours est multiple : (1) de donner une connaissance suffisamment large de ces groupes, d'un point de vue algébrique, géométrique et combinatoire ; (2) de mettre en pratique les connaissances acquise au baccalauréat (algèbre et géométrie, topologie) ; (3) d'aborder l'un ou l'autre des nombreux questions ou problèmes ouverts concernant ces groupes.

PLAN DÉTAILLÉ (TENTATIVE) :

Bloc 1 - Groupes discrets de réflexion : Rappel de géométrie : modèles de la géométrie sphérique, euclidienne affine et hyperbolique. Notion de topologie des groupes. Groupes discrets de réflexions : exemples, arrangement d'hyperplans et systèmes de racines, présentation par générateurs et relations, discussion sur les classifications.

Bloc 2 - Groupes de Coxeter : notion générale : mots, relations, longueur, conditions d'échange et de réduction, sous-groupes paraboliques. Représentations géométriques sur un espace quadratique, systèmes de racines, ensemble d'accumulations, cône imaginaire. Ordre faible et enveloppe convexe : problèmes ouverts. **Devoir à rendre.**

Bloc 3 - Polytopes de briques : **Visite de Vincent Pilaud, Chercheur au CNRS et au LIX, École Polytechnique, Paris, France**. Vincent Pilaud est un des spécialistes mondiaux des associaèdres et autres polytopes de briques. Il nous parlera en particulier de :

- *polytopes :* V- et H-description ; faces ; f- et h-vecteurs et relations de Dehn-Sommerville ; polytopes cycliques et théorème de la borne supérieure ; graphes de polytopes. Exemples du permutaèdre et de l'associaèdre. Exercices : facettes du polytope cyclique ; polytope d'un ordre partiel ; cone d'incidence d'un ordre partiel.
- *polytope de briques d'un complexe de sous-mots.* Motivation combinatoire des complexes de sous-mots : pseudo/multi/triangulations, complexe d'amas d'une algèbre amassée de type fini. Fonction racine et flips dans un complexe de sous-mots. Construction et description du polytope des briques d'un complexe de sous-mots à racines indépendantes. Exercices : polytope des briques d'un mot dupliqué ; le barycentre des associaèdres généralisés.

CONTENU DES APPRENTISSAGES :

Chaque séance du cours fera l'objet d'un exposé avec questions et discussions.

La quatrième scéance, toutes les deux semaines, sera dédiée à la correction d'exercices distribués en classe le lundi de la semaine précédente.

BIBLIOGRAPHIE :

- Chapter 5 in È. B. Vinberg and O. V. Shvartsman. Discrete groups of motions of spaces of constant curvature. In *Geometry, II*, volume 29 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 139–248. Springer, Berlin, 1993.
- C. Hohlweg, J. P. Labbé and V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups*, *Canadian. J. of Math.* **66**, (2014), 323–353.
- M. Dyer, C. Hohlweg and V. Ripoll, *Imaginary Cones and Limit Roots in Infinite Coxeter Groups* (2013, arXiv :1303.6710)

- C. Hohlweg, J.-P. Préaux and V. Ripoll, *On the Limit Set of Root Systems of Coxeter Groups acting on Lorentzian spaces* (2013, arXiv :1305.0052).
- G. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Text in Maths. **152** (1995)
- V. Pilaud et C .Stump, *Brick polytopes of spherical subword complexes : A new approach to generalized associahedra*, `arXiv:1111.3349` (2011)

*Nous nous insprirerons aussi de :*

- J. E. HUMPHREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in Adv. Mathematics **29** (1990).
- A. BJÖRNER ET F. BRENTI, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate texts in Mathematics **231**, Springer (2005).
- C. Hohlweg, *Permutahedra and Associahedra : Generalized associahedra from the geometry of finite reflection groups in* 'Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures', Tamari Memorial Festschrift, editors F. Mueller-Hoissen, J. Pallo and J. Stasheff, Progress in Mathematics, vol. 299, (Birkhauser, 2012), 129–159.
- V. Pilaud et F. Santos, *The brick polytope of a sorting network*, European J. Combin. **33(4)** (2012) p.632–662.

*Autres références sur ce sujet (et dont je pourrais éventuellement m'inspirer) :*

- A. Borovik and A. Borovik, Mirrors and Reflections, Universitext, Springer (Ce livre contient des exercices corrigés.)
- M. A. Davis, Geometry and Topology of Coxeter groups, London Mathematical Society Monographs
- N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6*, Masson (1981).
- C. T. BENSON ET L. C. GROVE, *Finite Reflections Groups, second edition*, Graduate texts in Mathematics **99**, Springer (1985).

## Evaluation

- **Un devoirs : 40%**
  - Ce devoir sera à remettre le lundi 17 novembre en classe.

  **Chaque jour de retard entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.**

  *Ce devoir vise les objectifs suivants :*

  1. Apprendre à écrire des mathématiques, à résoudre des problèmes, et à en communiquer clairement la solution.
  2. Apprendre à rédiger des articles de qualité professionnelle.

  *Consignes :*

- Le nombre de page maximum permis sera spécifié lors de la distribution de l'énoncé. Ce devoir DEVRA être rédigé sous LaTeXet imprimé sur du papier format *lettre*.
- **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ.**
- Les consignes propres au devoir.

*Critères d'évaluations du devoir :*

- Respect des consignes
- Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs)
- Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques
- Voir le règlement concernant le plagiat à la fin de ce texte

- **Participation, présence et présentation de la solution d'un ou d'exercices : 30%**

* Durée : 40 minutes à une heure.

* Lieu et date : Salle de classe, la date sera déterminé au moins une semaine à l'avance.

*Critères d'évaluations :*

- présence et participation au cours.
- Clarté de l'expression orale et exactitude du raisonnement amenant à la solution
- Qualité de la présentation au tableau.

- **Un examen final récapitulatif : 30%**

* Durée : deux heures (15h30-17h30)

* Lieu et date : mercredi 10 décembre de 15h30 à 17h30 au PK-4323.

* Vous rendrez ce que vous avez fait en classe au bout des deux heures, et le reste des questions sera à traiter en devoir à rendre le mercredi 17 décembre à 15h30 lors du dernier cours en classe, tout retard entrainera la perte de 10% par jour à compter du 17 décembre à 15h30. Si vous le désirez, vous pouvez traiter à nouveau les questions que vous aviez traitées en classe. Le nombre maximal de pages sera précisé lors de l'examen.

* Le lundi 15 décembre je serais disponible dans la salle du cours afin de répondre à d'éventuelles questions **précises** ou bien afin de jeter un coup d'oeil informel à votre travail et ainsi vous suggérer des pistes afin de le parfaire pour le 17 décembre.

**Dans le cas de cet examen, calculatrice, ordinateur, téléphone, tablette etc. est interdite.** L'utilisation de vos notes de cours est permises.

*Critères d'évaluations :*

- Clarté de la rédaction et exactitude du raisonnement amenant à la solution
- Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques

## PLAGIAT

## Règlement no 18 sur les infractions de nature académique

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie ou falsification de document commis par une étudiante, un étudiant, de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen ou d'un travail faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constituent une infraction au sens de ce règlement

**La liste non limitative des infractions est définie comme suit :**

- la substitution de personnes ;
- l'utilisation totale ou partielle du texte d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence ;
- la transmission d'un travail pour fins d'évaluation alors qu'il constitue essentiellement un travail qui a déjà été transmis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant ;
- l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen ou de tout autre document ou matériel non autorisés, ou encore d'une évaluation non méritée ;
- la possession ou l'utilisation, avant ou pendant un examen, de tout document non autorisé ;
- l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen d'une autre personne ;
- l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle ;
- la falsification d'un document, notamment d'un document transmis par l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances ;
- la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Les sanctions reliées à ces infractions sont précisées à l'article 3 du Règlement no 18

Pour plus d'information sur les infractions académiques et comment les prévenir : http://r18.uqam.ca/