UQÀM Université du Québec à Montréal	**MAT865E SÉMINAIRE THÉMATIQUE DIDACTIQUE DES FONCTIONS** **Professeur : Fernando Hitt** **Local : PK-5920** **Curriel : hitt.fernando@uqam.ca et ferhitt@yahoo.com**

Automne 2014

PLAN DE COURS

Problématique

Certaines branches des mathématiques jouent un rôle privilégié dans l'apprentissage de bien des disciplines, et en particulier des sciences, puisqu'elles permettent, grâce à la modélisation, une meilleure compréhension des phénomènes en présence. Et dans ces mathématiques, le concept de fonction occupe une place de choix.

En 1748, le mathématicien Euler montre dans son livre « *Introductio in analysin infinitorum* » que le concept de fonction est un concept fondamental. Depuis lors, ce concept a été la pierre angulaire de tous les programmes d'études de mathématiques. Il est facile de comprendre l'importance de ce concept quand on comprend que sans lui il n'y a pas de modélisation possible.

Le concept de fonction n'est pas un concept facile à construire par les étudiant(e)s de l'école secondaire. Il n'est même pas toujours parfaitement acquis par les enseignants du secondaire. Le coût social des difficultés rencontrées en mathématiques par les étudiant(e)s est élevé. En effet, nous observons un nombre élevé d'échecs, de redoublements et parfois même de décrochages.

La construction du concept de fonction commence au cours de la 2^{e} année du secondaire, il se poursuit jusqu'à la fin du secondaire en prenant une importance particulière en 3^{e} et 4^{e} année. Un très grand nombre d'étudiant(e)s poursuivront son étude au CÉGEP, et même à l'Université. Très tôt, on peut malheureusement souvent constater, lors de séances de résolution de problèmes, que les étudiant(e)s ont déjà des conceptions qui s'opposent à une construction correcte de ce concept.

Si la construction du concept de fonction et les processus de modélisation sont considérés comme particulièrement difficiles c'est parce qu'ils demandent que l'étudiant(e) maîtrise les différentes représentations des concepts en jeu et de leurs articulations. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, l'étudiant(e) n'est pas en mesure de voir les incohérences qui peuvent exister dans les résultats obtenus.

Différentes recherches montrent que les difficultés rencontrées par les étudiant(e)s sont de deux types. Le premier est lié à la complexité du concept de fonction (obstacle épistémologique), et le second est lié à la façon d'enseigner ce concept. En effet, les enseignants, ne l'ayant souvent que partiellement construit, ne sont pas en mesure d'accompagner leurs étudiant(e)s dans leur propre apprentissage.

L'enseignement actuel du concept de fonction, en 2^{e} et 3^{e} secondaire, donne une grande place aux représentations institutionnelles (représentations existant dans les manuels, les logiciels, etc.) en ignorant les représentations spontanées des élèves, c'est-à-dire celles qui émergent lors de la résolution de situations problèmes et qu'il est important d'encourager et de faire évoluer. Les problèmes

d'apprentissage vont émerger au fur et à mesure que l'élève avance dans ces études secondaires et au Cégep et l'obstacle pour surpasser devient de plus en plus difficile.

Descripteur du cours

Ce cours vise à familiariser les étudiant(e)s avec les différents axes de recherche et problématiques liés à l'enseignement et à l'apprentissage de la fonction.

Les objectifs de ce cours sont :

- D'analyser la littérature autour des conflits cognitifs sur l'apprentissage du concept de fonction
  - Conflits qui proviennent de la complexité du concept (repérés dans l'histoire des mathématiques),
  - Conflits qui proviennent pour la façon d'enseigner.
- de développer une autonomie chez les étudiant(e)s dans la recherche entourant la didactique des fonctions;
- d'habiliter les étudiant(e)s à élaborer une problématique de recherche autour du concept de fonction;
- d'amener les étudiant(e)s à cibler un ou plusieurs des conflits cognitifs.

Dans ce cours, les éléments suivants seront abordés :

- obstacles épistémologiques et didactiques associées à ce concept. Dès point de vue de l'histoire des mathématiques et du point de vue de l'enseignement.
- principales difficultés d'apprentissage des élèves recensées dans la littérature.
- problèmes de conception associés à la compréhension de la fonction chez les élèves et les enseignants.
- étude des méthodologies employées dans les principales recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la fonction.
- étude plus spécifique des méthodologies employées pour la collecte de données lors d'études portant sur les conceptions ou la compréhension du concept de fonction;
- étude de questionnaires employés pour la collecte de données;
- théorie sur les représentations;
- «concept image» et «concept définition»;

Évaluation

Travail individuel:

- Présentation de trois articles entre les références proposées dans le cours (30 septembre, 28 octobre et 25 novembre).
  - Présentation de 20 minutes et 15 minutes pour les questions.
  - Analyse de chaque article par écrit (4 pages maximum, Times New Roman 12 points, un et demi interligne),
- Lors de la présentation d'un article par une autre personne, on vous demande d'initier une discussion autour de la problématique en préparant en avance des questions ou des réflexions.

- Questions et/ou réflexions à propos de trois présentations faites par une autre personne (une page par présentation, Times New Roman 12 points, un et demi interligne),

- Un examen sur les fonctions le 21 octobre 2014.

Travail en équipe (2 personnes):

- Présentation d'une situation – problème, des problèmes et des exercices autour d'un obstacle cognitif lié à l'apprentissage des fonctions (9 décembre).

- 40 minutes de présentation et 20 minutes pour les questions.
- Analyse a priori sur les tâches proposées (document par écrit, Times New Roman 12 points, un et demi interligne),

Pourcentage des présentations des articles et documents correspondants : 30%

Pourcentage de l'examen : 40%

Pourcentage du travail en équipe : 30%

Guide pour l'analyse des articles (4 pages maximum)

Auteur selon les normes établies des références bibliographiques (APA style).

Analyse de l'article (deux ou trois pages) autour des points de 1 à 5:

1. INTRODUCTION

L'introduction sert à présenter :

a) le sujet de la recherche, en précisant l'envergure et les limites de celle-ci,
b) l'état de la question et le problème à résoudre qui en découle,
c) l'objective à atteindre,
d) le cadre théorique utilisé par l'auteur
e) la méthode utilisée,
f) la démarche adoptée,
g) la structure du document analysé.

2. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES SUIVIES PAR L'AUTEUR

Situer le problème de recherche dans un cadre théorique. Il y a des auteurs qui n'explicitent pas leur cadre théorique; votre tâche est de l'expliciter.

3. MÉTHODOLOGIE

Une description sur la méthodologie utilisée par l'auteur et type d'expérimentation.

4. ANALYSE DE RÉSULTATS

5. CONCLUSIONS

6. UNE PAGE où vous allez donner votre opinion critique autour de l'article analysé.

De façon précis, nous aborderons les contenus suivants:

Mathématiciens du passé et leur opinion sur l'enseignement des fonctions

Glaeser G. (1972). La Transmission des connaissances mathématiques hier, aujord'hui, demain. *L'Enseignement Mathematique (Revue Internationale),* serie II, Tomo XVIII, fascículo 3-4.

Kolmogorov A. (1993). Home in the range and in the domain as well. Hommage à A. Kolmogorov.

Obstacles épistémologiques

Bachelard, G. (1938/1975). *La Formation de L'Esprit Scientifique.* France : Librairie Philosophique J. Vrin. 10eme édition.

Brousseau G. (1976/1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 4.2, pp. 164-198.

Conflits cognitifs dans le développement des idées mathématiques

Histoire

Charbonneau, L. (1987). Chronique : L'histoire des mathématiques. *Bulletin AMQ*, mai, pp. 5-10; Octobre pp. 5-8; Décembre pp. 5-9.

Hitt, F. (1998). Researching a problem of convergence with MATHEMATICA. Hystory and visualization of a mathematical idea. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 28, No. 5, 1998, pp. 697-706.

Kleiner I. (1989). Evolution of the function concept. *The College Mathematics Journal*. Vol. 20, No. 4, pp 282-300.

Rüthing D. (1984). Some définitions of the concepts of function from J. Bernoulli to N. Bourbaki. *Mathematics Intelligencer*. Vol. 6(4) 6:4, 72–77.

Phili Ch. (1976). Le développement du concept de fonction. Présentation au Séminaire de Philosophie et de Mathématiques de l'École Normale Supérieure. Paris.

Conflits cognitifs dans l'apprentissage du concept de fonction (élèves)

Approche théorico-expérimentale

Balacheff N. et Gaudin N. (2002). Students conceptions : an introduction to a formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, No. 65. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/

Bloch, I. (2003). Teaching functions in graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove ?. *Educational studies in mathematics,* 52, 3-28.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Carlson M. (1998). A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. *Research in Collegiate Mathematics Education, 7*, 114-162.

Carlson, M. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 63-77), Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN.

Carlson, M., Oehrtman, M. & Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understanding. *Cognition and Instruction*, *28*(2) 113-145.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1-2), 77-87.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior, 10*, 117-160.

Duval R. (1988). Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp 65-82). Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Approche expérimentale

Janvier C. (1987). Representation and Understanding: The notion of Function as an Example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-71). Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier C. (1993). Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques. *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*. En J. Baillé et S. Maury. (Éds), *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation* (pp. 17-37).

Hitt F., Guzmán J. & Paéz R. (2001). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques. *Actes du Colloque Annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec*. Montréal, Canada, pp. 173-187.

Even, R. (1993). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp. 94-116.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21, pp. 521-544.

Saraiva M. J. & Teixeira A.M. (2008). Secondary school students's understanding the concept of function. ICME-11, Monterrey, México, http://tsg.icme11.org/document/get/331

Conflits cognitifs dans l'apprentissage du concept de fonction (enseignant(e)s)

Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analysing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 131-152.

Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. MAA *Notes*, 25. Washington, DC.

Hitt F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16*(4), 10-20.

Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.

Hitt F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation lies au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*, 7-26. *IREM-Strasbourg.*

Hitt F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, *8*, 255-271.

Schwartz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 259-291.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.

Thompson P. (1994b). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *1*(4), 21-44.

Analyse de manuels en France

Comin E. (2005). Variables et fonctions, du Collège au Lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. *Petit x*, 67, 33-61.

Enseignement

Méthodologie : Whole brain teaching
http://www.youtube.com/watch?v=h6WJdsb0dfM

Karsenty, R. (2003). What adults remember from their high school mathematics? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 117-144.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 225-286.

Enseignement (Modélisation mathématique)

Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. http://tsg.icme11.org/tsg/show/21.

Hitt F. & Morasse C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009. *"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.* G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

Hitt, F. and González-Martín, A. (in presse). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics.*

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-193). MAA Notes 25.

Passaro V. (2009). Obstacles à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, *14*, 61-77.

Presmeg, N. & Balderas, P. (2002). Graduate Students' Visualization in Two Rate of Change Problems. In F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 47-61), Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN.

Technologie

Arcavi A. & Hadas N. (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. In F. Hitt (Editor), *Representations and Mathematics Visualization.* International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M.A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 317-333.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Bibliographie

Confrey, J, Smith, E. (1994). Exponential function, rates of change, and the multiplicative unite. *Educational studies in mathematics*, 26, 135-164.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp 140-152). Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 2, 94-116.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of function. *Educational studies in mathematics*, 21, 521-544.

Drijvers P. (1997). Un problème historique et la TI-92. *Hypothèses, Bulletin Scientific de Secondaire de Texas Instruments*, Avril, No. 11, pp 28-30.

Gaudin, N. (2002). Conceptions de fonction et registres de représentation: Étude de cas au lycée. *For the learning of mathematics*, 22, 2, 35-47.

Haimes, H. H. (1996). The implementation of a ``function`` approach to introductory algebra: a case study of teacher cognitions, teacher actions, and the intended curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 5, 582-602.

Harel, G., Dubinsky, D. (1992). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.* Washington, D.C. : Mathematical Association of America.

Haimes, D. H. (1996). The emplementation pf a ``function`` approach to introductory algebra : A case study of teacher cognition, teacher action, and the intend curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 5, 582-602.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) (2007). Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/menusec.htm

O'Callaghan, B. R., (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 1, 21-40.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study. *Educational studies in mathematics*, 53, 229-254.

Van Dyke, F. (1996). The inverse of a function. *The mathematics teacher,* 89, 2, 121-124.

Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: the impact of cours integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 4, 346-370.

Mémoires

Cabana, M. (1996). *La notion de fonction vue sous l'angle de l'étude de la variation.* Faculté des Sciences de l'Université du Québec à Montréal, Montréal.

Drolet, D. (2012). *Évaluation du niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction*. Mémoire de maîtrise (M.A.). Faculté des Sciences de l'Université du Québec à Montréal, Montréal.

Fikrat, L. (1994). *La notion de fonction et ses représentations*. Mémoire de maîtrise (M.A.). Faculté des Sciences de l'Université du Québec à Montréal, Montréal.

Jacques, M. (2004). *Le «concept image» de fonction qui émerge de la fréquentation d'une collection de manuels scolaires du secondaire*. Faculté des Sciences de l'Université du Québec à Montréal, Montréal.

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire.* Faculté des Sciences de l'Université du Québec à Montréal, Montréal.

René de Cotret, S. (1985). *Étude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Faculté des Sciences de l'Université du Québec à Montréal, Montréal.