UQÀM

Département de mathématiques

Automne 2016

MAT 8510
CALCUL STOCHASTIQUE APPLIQUÉ

Groupe 30

Cours	Mercredi 18h 00 – 21 h 00	SH-2580
Séance d'exercices	Vendredi 9 h 30 – 11 h 30	SH-2580

COORDONNATEUR DU COURS

Nom Mathieu Boudreault
Courriel boudreault.mathieu@uqam.ca

ENSEIGNANT DU COURS

Nom Michel Adès
Courriel ades.michel@uqam.ca

DÉMONSTRATEUR DU COURS

Nom Adel Benlagra
Courriel benlagra.adel@courrier.uqam.ca

Objectifs

Ce cours vise à fournir à l'étudiant les fondements nécessaires au calcul stochastique et aux processus stochastiques, de sorte qu'il puisse les appliquer dans les différents domaines de la finance : ingénierie financière, gestion des risques et de portefeuilles.

Thèmes

I. Généralités

1- Rappel sur le calcul différentiel et intégral.

2- Rappel sur les probabilités :
Expérience aléatoire, espace échantillon, événement, variable aléatoire, espace de probabilité, probabilité conditionnelle, mesure de probabilité, tribu, fonctions de masse, de densité et de répartition, espérance, variance, covariance et leurs propriétés, espérance conditionnelle, théorème de Bayes.
Lois discrètes et continues :
a) Binomiale, Normale, Exponentielle.
b) Géométrique, Binomiale Négative, Poisson, Hypergéométrique, Gamma, Multinomiale *(si le temps le permet).*

3- Théorème Central Limite (TCL) : Preuve et applications.

4- Fonctions génératrices des moments (fgm) des différentes distributions et leur dérivation en faisant appel au calcul différentiel et intégral.
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev *(si le temps le permet).*

5- Sommes aléatoires, définition, distribution, espérance, variance et application des fgm en utilisant le calcul différentiel et intégral.

6- Modèle binomial et différentes options financières.

7- Distribution Lognormale et applications en finance.

8- Mouvement brownien géométrique et applications en finance.

II. Processus stochastiques

9- Chaînes de Markov, définition et exemples, matrice de transition, promenade aléatoire, équations de Chapman-Kolmogorov et applications, probabilités limites, système ergodique.
Classification des états, périodicité *(si le temps le permet).*

10- Mouvement brownien, définition et propriétés, calcul des probabilités dans le contexte d'interpolation et d'extrapolation, pont brownien.
Mouvement brownien entre deux points.
Loi du maximum, loi de l'arc sinus du brownien *(si le temps le permet).*

11- Sigma algèbre, temps d'arrêt et exemples.

12- Théorie des martingales, définition, exemples, théorème du temps d'arrêt pour les martingales.

13- Martingales et mouvement brownien.

III. Intégrales stochastiques

14- Étude détaillée de la théorie des intégrales stochastiques d'Itô, définition, propriétés.

15- Différentielle stochastique, processus d'Itô, lemmes simplifié et généralisé d'Itô.

16- Table de multiplication d'Itô et variation quadratique du mouvement brownien.

IV. Équations différentielles stochastiques

17- Équation différentielle stochastique, définition d'une solution, existence et unicité d'une solution, intégration par partie, covariation quadratique, exponentielle stochastique.

V. Le calcul stochastique et le contexte des formules de Black-Scholes

18- Théorème de Girsanov et applications, dérivée de Radon-Nikodym, condition de Novikov. Formule de Black-Scholes suivant plusieurs contextes financiers et diverses applications en finance.

Matière des examens

En général, l'examen intra portera jusqu'aux chaînes de Markov inclusivement, alors que l'examen final portera sur le mouvement brownien jusqu'aux modèles de Black-Scholes.

Évaluation

. Premier test de 10% ; Mercredi le 28 septembre de 19h45 à 21h00.
. Examen intra de 40%; Dimanche le 30 octobre de 9h30 à 12h30.
. Deuxième test de 10%; Mercredi le 23 novembre de 19h45 à 21h00.
. Examen final de 40% ; Dimanche le 18 décembre de 9h30 à 12h30.
. Tous ces examens auront lieu dans les salles de classe.
. Aux examens, seules les absences pour des raisons médicales sérieuses seront acceptées.
. *Il n'y a pas d'examen de reprise*. L'examen différé n'est pas un droit mais un privilège.
. Les formulaires seront distribués aux examens.
. Le cours suivra de près les notes de cours et les travaux pratiques en deux fascicules, qui sont disponibles à la Coop-Sciences de l'UQÀM au PK-M425.
. ***La connaissance du calcul différentiel et intégral est essentielle dans le cours.***

Bibliographies (à titre facultatif et optionnel)

[1] Baxter, M., Rennie, A. *«Financial Calculus»*, Cambridge University Press, 2002.
HG6024A3 B28 (Éd. 1996).

[2] Castañeda, L. B. et al. *«Probability and Stochastic Processes»*,Wiley, 2012.

[3] Comets, F., Meyre, T. *«Calcul stochastique et modèles de diffusion»*, Dunod, 2006.
QA274 C655.2006

[4] Cvitanić, J, Zapatero, F. *«Economics and Mathematics of Financial Markets»*, MIT, 2004.
HG106 C85.2004

[5] El Karoui, N., Gobet, E. *« Les outils stochastiques des marchés financiers, une visite guidée de Einstein à Black-Scholes»*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2011.
HG 4515.3 E53 .2011

[6] Etheridge, A. *«A Course in Financial Calculus»*, Cambridge University Press, 2002.
HG6024A3 E84.2002

[7] Epps, T. W. *«Quantitative Finance»*, Wiley, 2009.
HG 106 E67 .2009

[8] Focardi, S. M., Fabozzi, F. J. *«The Mathematics of Financial Modeling & Investment Management»*, Wiley, 2004.
HG106 F63.2004
[9] Guojun Gan et al, *«Measure, Probability, and Mathematical Finance: A Problem-Oriented Approach»*, Wiley, 2014.
Prêt entre bibliothèques
[10] Hirsa, A. *«Computational Methods in Finance»*, CRC 2013.
Prêt entre bibliothèques
[11] Hirsa, A. Neftci, S.N. *«An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives»*, Academic Press, 2013.
HG 6024 A3 N44.2000
[12] Hull, J. *«Options, futures et autres actifs derivés»*, 8e édition, Pearson, 2011.
HG 6024 A3 H8514 .2011
HG 6024 A3 H8514 .2014
[13] Hull, J. *«Futures et options: Principes fondamentaux»*, 6e édition, Pearson, 2009.
HG 6024 A3 H84914 .2009
[14] Junghenn, D. H. *«Option Valuation: A First Course in Financial Mathematics»*, CRC, 2012.
HG 6024 A3 J86 .2012
[15] Kennedy, D. *«Stochastic Financial Models»*, CRC, 2010.
HG 4515.2 K46 .2010
[16] Lamberton, D., Lapeyre, B. *«Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance»*, Ellipses, 1997.
HG4515.3L25 1997
HG 4515.3 L25 .2012
[17] Lindstöm, E et al, *«Statistics for Finance»*, CRC, 2015.
Ressource électronique
[18] Mikosch, T. *«Elementary stochastic calculus with finance in view»*, World Scientific, 1999.
Ressource électronique
[19] Øksendal, B. *«Stochastic Differential Equations»*, sixth edition, Springer, 2003.
QA 274.23 Q47 .2003
[20] Racicot, F. E., Théoret, R. *«Finance computationnelle et gestion des risques»*, Presses de l'Université du Québec, 2006.
HG176.7 R33.2006
Ressource électronique
[21] Ross, S. *«Introduction to Probability Models»*, Academic Press, tenth edition, 2011.
QA 273 R84 .2010

Compléments bibliographiques

[1] ***Schaum's outlines «Calculus» [ressource électronique]***
Frank Ayres . Elliott Mendelson Schaum's outline of theory and problems of differential and integral calculus.
New York ; Toronto : McGraw-Hill c2009 5th ed..
http://lib.myilibrary.com.proxy.bibliotheques.uqam.ca:2048/Open.aspx?id=513608

[2] ***Schaum's outline «Advanced calculus» [ressource électronique]***
Robert C. Wrede Murray R. Spiegel - Theory and problems of advanced calculus.
New York ; Toronto : McGraw-Hill c2010 3rd ed..
http://lib.myilibrary.com.proxy.bibliotheques.uqam.ca:2048/Open.aspx?id=277608

[3] Devolder, P. ; Fox, M. ; Vaguener, F. 2015. « *Mathématiques financières* ». 2e éd. Paris : Pearson. http://virtuolien.uqam.ca/tout/UQAM_BIB001259607
Bibliothèque des sciences, comptoir de prêt et réserve.

[4] Simon, C.P. ; Blume, L. 1998. «*Mathématiques pour économistes*». Bruxelles : De Boeck. http://virtuolien.uqam.ca/tout/UQAM_BIB000308097
Bibliothèque des sciences, comptoir de prêt et réserve.

DÉROULEMENT DES EXAMENS

L'étudiant doit poser sur sa table sa carte d'identité de l'UQAM au début de l'examen.

Documents et autres

Aucun document n'est permis, outre le formulaire qui sera annexé à votre questionnaire. Les téléphones cellulaires doivent être rangés. Les calculatrices non programmables sont permises, mais sont interdites celles dont les fonctions sont normalement associées à celles d'un ordinateur (par exemple, la TI-92).

Retard à un examen

Aucun étudiant ne pourra quitter la salle d'examen durant la première heure. Aucun étudiant ne sera admis à la salle d'examen avec plus d'une heure de retard. L'étudiant pourra se rendre à la toilette sur demande, mais ne sera pas réadmis dans la salle d'examen s'il s'absente pour toute autre raison.

Absence à un examen

Si vous *devez* vous absenter d'un examen pour une raison valable, vous devez remplir un formulaire ***dans les 4 jours ouvrables après la date de l'examen***. Vous pouvez vous procurer le formulaire au département de mathématiques (local PK-5151). Vous devez *obligatoirement* annexer les pièces justificatives originales. S'il s'agit d'un papier médical, celui-ci doit explicitement affirmer que vous n'étiez pas en mesure de composer un examen le jour en question. Il appartient à l'enseignant d'étudier cas par cas les raisons d'une absence et d'autoriser ou non un examen différé.

En particulier, les motifs suivants ne seront ***pas*** acceptés :

1) conflits d'horaire avec d'autres cours;
2) billets de voyage;
3) activités professionnelles.

Les simples billets de médecins ne seront pas acceptés.

En cas d'incapacité, communiquer par courriel ou par téléphone avec l'enseignant du cours.

Modification ou révision de notes

Les directives concernant une demande de modification ou de révision de note d'un examen se trouvent au www.orh.esg.uqam.ca/vie-etudiante/modification-de-notes.html. Veuillez-vous adresser *à votre enseignant* si vous voulez voir votre copie.

Complément à propos des examens différés

Dans le cas où un examen différé aurait été autorisé par l'enseignant, il sera plus difficile que l'original afin de tenir compte du temps d'étude supplémentaire disponible, et ce, par souci d'équité pour les autres étudiants.

Communication des résultats

Les résultats des évaluations vous seront communiqués via le logiciel RÉSULTATS : www.resultats.uqam.ca/etudiant/

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.

Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté

souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante :http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php

Règlement no 18 sur les infractions de nature académique

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie ou falsification de document commis par une étudiante, un étudiant, de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen ou d'un travail faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constituent une infraction au sens de ce règlement.

La liste non limitative des infractions est définie comme suit :

- la substitution de personnes;
- l'utilisation totale ou partielle du texte d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
- la transmission d'un travail pour fins d'évaluation alors qu'il constitue essentiellement un travail qui a déjà été transmis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
- l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen ou de tout autre document ou matériel non autorisés, ou encore d'une évaluation non méritée;
- la possession ou l'utilisation, avant ou pendant un examen, de tout document non autorisé;
- l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen d'une autre personne;
- l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
- la falsification d'un document, notamment d'un document transmis par l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
- la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

POLITIQUE DES EXAMENS DIFFÉRÉS

Proposition R-13-696 présentée par le Comité exécutif

Il est PROPOSÉ que l'Assemblée départementale adopte la politique départementale suivante pour les examens différés :

La possibilité pour un étudiant d'avoir un examen différé n'est pas un droit, mais un privilège. L'autorisation d'un examen différé est de caractère exceptionnel. L'enseignant n'a pas d'obligation d'accepter l'examen différé.

La demande d'autorisation d'un examen différé faite par l'étudiant, l'étudiante doit être étayée et déposée dans un **délai de 4 jours** ouvrables après la date de l'examen.

Il est de la responsabilité de l'étudiant, de l'étudiante d'éviter les conflits d'horaire lors de l'inscription. Un tel conflit ne constitue pas un motif pour justifier une demande d'examen différé.

L'enseignant tient compte, dans la rédaction de l'examen différé et de son niveau de difficulté, du temps supplémentaire dont a disposé l'étudiant, l'étudiante pour se préparer.

L'étudiant, l'étudiante qui ne se présente pas à un examen différé a automatiquement 0 à cet examen.

La date de reprise d'un examen est non négociable et il ne peut y avoir de reprise d'un examen différé.

Proposition adoptée par l'Assemblée départementale de mathématiques lors de sa réunion tenue le 21 mai 2013.
Adoptée à l'unanimité.

Michel Adès

. http://www.math.uqam.ca/distinction-prof.php

. www.math.uqam.ca/~michelades

. *Bureau* : PK-5225, *téléphone* (514) 987-3000, poste 1708.

. *Courriel* : ades.michel@uqam.ca

. ***Pour toute correspondance, mentionnez MAT8510 et votre groupe comme sujet de votre courriel.***

. Temps moyen de réponse aux courriels, est **de deux jours ouvrables.**

. *Disponibilité sur rendez-vous.*

. Il est fortement recommandé de participer aux cours et aux travaux pratiques par une présence active, dynamique et continue.

. Il est fortement suggéré de ranger vos cellulaires, tablettes, etc. Ne naviguez pas sur internet durant les heures du cours pour mieux *écouter et comprendre le cours.*

. *Je vous invite très fortement à discuter, dialoguer, échanger vos idées et de me faire part régulièrement de vos commentaires dans le but de vous mener à un excellent succès.*

. Je vous recommande de vous mettre à jour dans vos études assidûment et fréquemment.

EXTRAIT DU CALENDRIER UNIVERSITAIRE 2016 / DATES IMPORTANTES

. Congé : Lundi le 10 octobre 2016 : Action de Grâces.

. Abandon des cours avec facturation, sans mention d'échec: Du 14 septembre au 9 novembre 2016.

. Fin du trimestre d'automne pour les cours ayant débuté le 6 septembre : Mercredi le 21 décembre 2016.

CALENDRIER DÉTAILLÉ DU COURS / AUTOMNE 2016 / GROUPE 30

COURS	DATE	THÉORIE
1	Mercredi le 7 septembre	Thème : 1
2	Mercredi le 14 septembre	Thème : 2
3	Mercredi le 21 septembre	Thèmes : 2 suite et 3
4	Mercredi le 28 septembre	Thèmes : 4, 5 et 6 **PREMIER TEST**
5	Mercredi le 5 octobre	Thèmes : 7 et 8
6	Mercredi le 12 octobre	Thème : 9
7	Mercredi le 19 octobre	Thème : 9 suite
8	Mercredi le 26 octobre **Dimanche le 30 octobre**	**RÉVISION** **EXAMEN INTRA**
9	Mercredi le 2 novembre	Thèmes : 10 et 11
10	Mercredi le 9 novembre	Thèmes : 12 et 13
11	Mercredi le 16 novembre	Thème : 14
12	Mercredi le 23 novembre	Thèmes : 15 et 16 **DEUXIÈME TEST**
13	Mercredi le 30 novembre	Thèmes : 17 et 18
14	Mercredi le 7 décembre	Thème : 18 suite
15	Mercredi le 14 décembre **Dimanche le 18 décembre**	**Révision** **EXAMEN FINAL**

Dates et contenu des travaux pratiques / Groupe 30

Séance 1 / Vendredi le 16 septembre
Problèmes sur le calcul différentiel et intégral : une petite sélection.
Problèmes sur l'espace échantillon, variable aléatoire, probabilité conditionnelle, mesure de probabilité, tribu, fonctions de masse, de densité et de répartition.

Séance 2 / Vendredi le 23 septembre
Problèmes sur l'espérance, variance, covariance, espérance conditionnelle, théorème de Bayes.
Problèmes sur les lois discrètes et continues, et sur les applications du TCL.
Problèmes sur les fonctions génératrices des moments (fgm) des différentes distributions en faisant appel au calcul différentiel et intégral.

Séance 3 / Vendredi le 30 septembre
Problèmes sur les sommes aléatoires avec application des fgm en utilisant le calcul différentiel et intégral.
Problèmes sur le modèle binomial et sur la distribution Lognormale en finance.

Séance 4 / Vendredi le 7 octobre
Suite des problèmes sur le modèle binomial et sur la distribution Lognormale en finance.
Problèmes sur le mouvement brownien géométrique.

Séance 5 / Vendredi le 14 octobre
Problèmes sur les chaînes de Markov.

Séance 6 / Vendredi le 21 octobre
Suite des problèmes sur les chaînes de Markov.

Séance 7 / Vendredi le 28 octobre
Révision

Séance 8 / Vendredi le 4 novembre
Problèmes sur le mouvement brownien.

Séance 9 / Vendredi le 11 novembre
Suite des problèmes sur le mouvement brownien.
Problèmes sur le temps d'arrêt, les martingales et sujets connexes.

Séance 10 / Vendredi le 18 novembre
Problèmes sur les intégrales stochastiques, lemme d'Itô et sujets connexes.

Séance 11 / Vendredi le 25 novembre
Problèmes sur la table d'Itô et les équations différentielles stochastiques.
Problèmes sur la différentielle d'un produit, covariation quadratique, exponentielle stochastique.

Séance 12 / Vendredi le 2 décembre
Problèmes sur le théorème de Girsanov, dérivée de Radon-Nikodym, la théorie de Black-Scholes et diverses applications en finance.

Séance 13 / Vendredi le 9 décembre
Révision

N.B. ***Les dates mentionnées dans le calendrier détaillé de même que dans les travaux pratiques sont flexibles dans le temps.***

Échantillon de calculatrices

1) SHARP-EL520XBWH (scientifique, environ 20 $).

2) SHARP-EL738C (financière, environ 37 $).





********Bonne session d'automne 2016 et excellent succès********
Michel Adès