MAT8131 Géométrie différentielle (Automne 2022)
Professeur: Olivier Collin, Bureau PK-5340, Courriel: collin.olivier@uqam.ca
Horaire: Lundi 9h30-12h30 salle PK-7210
Heures de disponibilité: Pendant les pauses, après le cours ou sur rendez-vous.

Introduction: Ce cours se veut une introduction à la géométrie différentielle moderne. Il sera utile d'avoir déjà rencontré l'approche classique pour les courbes et surfaces telle qu'enseignée au niveau du premier cycle en mathématiques.
Nous aborderons dans ce cours divers aspects de la théorie des variétés différentielles, en particulier les notions de vecteurs tangents, champs de vecteurs et différentielle d'une application entre variétés, menant naturellement au calcul différentiel et intégral sur les variétés. Nous introduirons au passage la cohomologie de deRham et le cours se terminera par des éléments de la théorie des connexions sur les fibrés au-dessus de variétés et un bref survol de la théorie de Hodge, selon le temps disponible.
Le cours devrait être utile à quiconque voulant faire des études avancées en géométrie et topologie, en physique mathématique ou en analyse géométrique.

Prérequis : Une certaine familiarité avec l'algèbre abstraite et l'analyse enseignées au premier cycle est nécessaire.

Plan de cours :

Chapitre I : Variétés différentiables
- Rappels d'analyse dans $\mathbb{R}^n$ et quelques notions élémentaires de topologie.
- Définition des variétés topologiques et différentielles. Premiers exemples.
- Diverses définitions de l'espace tangent d'une variété. Dérivée d'une application.
- Applications de classe C^k entre variétés. Trois familles importantes : immersions, submersions et plongements.
- Sous-variétés. Variantes des théorèmes de fonctions inverses et implicites. Théorème du rang constant.
- Théorème de Sard et application au Théorème de plongement de Whitney.

Chapitre II : Champs de vecteurs sur une variété
- Champs de vecteurs, groupes à un paramètre de transformations et action sur les variétés. Exemples.
- Algèbre de Lie de champs de vecteurs. Distributions et Théorème de Frobenius.

Chapitre III : Calcul différentiel et intégral sur les variétés
- Fibrés tangents et cotangents. Formes différentielles et tenseurs.
- Dérivée extérieure et intégration de formes différentielles.
- Théorème de Stokes. Cohomologie des variétés et énoncé du Théorème de de Rham.
- Introduction au Théorème de Hodge.

Chapitre IV : Connexions sur les fibrés vectoriels et principaux
- Construction de fibrés vectoriels et principaux.
- Connexions comme systèmes différentiels et dérivées covariantes.
- Relations avec les classes caractéristiques: Théorie de Chern-Weil.

References

[1] CHERN, CHEN and LAM *Lecture notes on Differential Geometry*, World Scientific (1999).

[2] WARNER *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, Springer (1996).

[3] LEE *Introduction to differentiable manifolds*, Springer (2013).

[4] SPIVAK *A Comprehensive introduction to Differential Geometry*, Vol I and II, Publish or Perish (1979).

[5] PHAM MAU QUAN *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod (1969)