Géométrie et combinatoire (lecture dirigée)
Plan de Cours

PROFESSEUR :

FRANCO SALIOLA
Bureau : PK-4235
Courriel : saliola.franco@uqam.ca
Page web : http://lacim.uqam.ca/~saliola
Heures de consultation : en prenant un rendez-vous par courriel.

CONTENU DU COURS :

En gros : Développer les éléments de la théorie des ensembles ordonnés (« posets ») ; et explorer leur rôle dans des interactions entre la géométrie, la combinatoire et l'algèbre.

Ensembles (partiellement) ordonnés « posets » :

- définition et exemples d'ensembles ordonnés ;
- (iso)morphismes d'ensembles ordonnés ;
- éléments particuliers :

  éléments (in)comparables ; éléments maximaux/minimaux ; plus grand/petit élément ; bornes supérieures/inférieures ; (co)atomes
- sous-ensembles particuliers :

  intervalles ; (multi)chaînes ; antichaînes ; idéauxet filtres ;
- opérations sur les ensembles ordonnés :

  somme directe et somme ordinale ; produit direct et produit ordinal ; dualité
- algèbre d'incidence d'un ensemble ordonné :

  la fonction de zeta ; lien entre la fonction zeta et le nombre de (multi)chaînes ; la fonction de Möbius et la formule d'inversion de Möbius

Treillis

ensembles ordonnés gradués ; demi-treillis ; treillis ; treillis distributifs ; treillis modulaires ; treillis semimodulaires ; treillis géométriques ; calcul de la fonction de Möbius d'un treillis ; matroides et le matroide associé à un treillis géométrique ; éléments sans circuits brisés (SBC) ; théorème SBC de Rota ; théorème SBC de Sagan

Exemples importants d'ensembles ordonnés :

- arrangements d'hyperplans ; trellis d'intersection ; polynôme caractéristique ; enumeration des regions (théorème de Zaslavsky)
- introduction aux groupes de Coxeter : condition d'echange ; l'ordre faible sur un groupe de Coxeter, l'ordre faible est un treillis ; l'ordre de Bruhat sur un groupe de Coxeter
- treillis « bond » d'un graphe ; polynôme caractéristique du treillis bond du graphe coincide avec le polynôme chromatique du graphe

Polytopes : définitions et exemples de polytopes ; théorème de Minkowski–Weyl ; faces et facettes ; constructions : l'étoile d'un sommet, et le polaire d'un polytope ; treillis de faces d'un polytope et ses propriétés ; polytope « ordre » d'un ensemble ordonné ; polytope « chaîne » d'un ensemble ordonné ; le théorème de Pick et la théorie de Ehrhart ; f-vecteurs et le théorème de la borne supérieure ; polytopes simples et le critère de Kalai pour déterminer un polytope simple à partir de son graphe.

RÉFÉRENCES :

Il n'y a pas de livre obligatoire pour le cours ; le cours sera élaboré à partir de divers références.

Références disponible à la bibliothèque :

[CLM] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, *Ensembles ordonnés finis*, Springer, 2007.

[EC1] Richard P Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 1 (Second Edition)*, Cambridge University Press, 2011.

[HA] Richard P Stanley, *An introduction to hyperplane arrangements*, dans le livre *Geometric combinatorics*, IAS/Park City Mathematics Series, vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007

[Z] Günter M. Ziegler *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.

ÉVALUATION :

4 devoirs à 25% chacun

RÈGLES ET CRITÈRES D'ÉVALUATIONS :

Par le biais de vos devoirs et vos examens, vous êtes en train de me convaincre que vous avez maîtrisé la matière. Ne me laissez pas des doutes ! Il faut justifier toutes vos réponses clairement et proprement. Utiliser du texte pour communiquer au lecteur la structure et l'objectif de vos solutions.

SERA PRIS EN COMPTE DANS LES ÉVALUATIONS :

- l'exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- l'exactitude des calculs ;
- 20% sera attribuée à la qualité de la rédaction (qualité du français, clarté de la rédaction, bon usage du langage et des symboles mathématiques) ;
- respect du temps alloué.