UQÀM
*Département de mathématiques*

**Hiver 2012**

# MAT 7193 Didactique de la géométrie

groupe 30

Horaire : mercredi, de 18:00 à 21:00

Local : SH-3320

*Professeur :* Denis TANGUAY bureau : PK-5830 ; tél. : (514) 987-3000, poste 2612
tanguay.denis@uqam.ca

Site web personnel à l'adresse http://www.math.uqam.ca/~tanguay_d

# PLAN DE COURS

## *Objectifs*

Aider le futur enseignant à s'outiller pour enseigner la géométrie au secondaire, aussi bien en ce qui a trait aux approches, aux méthodes, à la diversité des activités possibles (incluant celles centrées sur l'utilisation des ressources technologiques), qu'en ce qui a trait aux stratégies envisageables pour surmonter ou minimiser les difficultés et obstacles rencontrés par les élèves, tels qu'identifiés par la recherche en didactique. Permettre à l'étudiant(e) d'amorcer sa réflexion sur le problème que pose l'enseignement de la preuve en mathématiques, en lien avec la géométrie.

## *Contenu*

- La transition, de la géométrie du *botaniste-décorateur* à la géométrie du *mathématicien-théoricien*. Survol du (nouveau) programme du primaire, le programme du secondaire étant plutôt examiné au fur et à mesure que les sujets seront abordés. La géométrie, science empirique de la mesure ou construction hypothético-déductive abstraite ? À cet égard, quel(s) rôle(s) donner à la mesure ? aux constructions à l'aide des outils (règle, équerre, compas, rapporteur) ? Un paradigme intermédiaire, la géométrie du physicien : la classe vue comme une communauté de chercheurs. Le rôle des définitions, d'un répertoire construit de résultats et de figures-clés. Aperçu des niveaux *van Hiele*. Étude exemplaire des quadrilatères.
- L'enseignement du raisonnement déductif en géométrie. La possibilité, en classe, d'une évolution progressive du degré de formalisme exigé. La géométrie des transformations dans cette perspective : comment éviter qu'elle passe d'une source de raisonnements au 1$^{er}$ cycle, à une source de conflits et obstacles au 2$^{e}$ cycle. Argumentation et déduction. L'organisation logique du raisonnement déductif et ses difficultés : structure ternaire du pas de déduction, enchaînements déductifs et déductogrammes.

- La notion de *figure géométrique* par opposition au *dessin* : quelle différence ? Comment amener l'élève à comprendre cette différence ? Apports possibles des logiciels de géométrie dynamique, tels *GeoGebra* : les constructions qui résistent aux déplacements ; points libres, semi-contraints ou contraints. *GeoGebra* comme outil d'exploration.
- Les isométries du plan : étude didactique et mathématique.
- Problèmes didactiques spécifiques à la géométrie dans l'espace. Le développement du *sens spatial* (matériel, manipulations, constructions…). Les formules de volume : peut-on profiter de leur justification pour amorcer une approche euclidienne de la géométrie spatiale, mieux en phase avec le travail fait en géométrie plane ? Par exemple en y faisant intervenir le Principe de Cavalieri ?
- Éléments d'analyses didactique et conceptuelle de la trigonométrie. Trigonométrie du triangle, cercle trigonométrique, radians. Fonction d'enroulement, fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.
- Si le temps le permet, éléments de didactique des géométries analytique et vectorielle.

## *Modalités d'organisation*

Alternance de cours plus magistraux (qui n'excluent cependant pas des discussions sur les sujets abordés) et de cours de type « atelier », où les étudiants sont amenés à « vivre » par eux-mêmes la problématique soulevée en classe pour constater qu'elle se pose effectivement[1]. Des éléments de réponses sont proposés par les étudiants ou par le professeur, pour être discutés ensuite. Sur des sujets précis, certaines simulations d'enseignement par des (semi)-volontaires seront faites devant le groupe, puis discutées.

## *Entente d'évaluation suggérée*

- Quatre comptes-rendus d'ateliers de 7% chacun.
- Participation, notamment aux simulations d'enseignement : 7%.
- Travail de session, par équipe de 2 ou 3, sur 25% : préparation d'une leçon (et de la séquence d'enseignement dans laquelle elle s'insère) sur un sujet choisi parmi la liste donnée plus loin. Détails du travail à faire eux aussi donnés plus loin.
- Un examen de fin de session comptant pour 40% de la note finale.

  **L'étudiant(e) doit cependant avoir la note minimale de 55% dans l'examen pour réussir le cours, indépendamment des autres volets.** Un « programme d'étude » et quelques questions typiques seront données au moins 2 semaines avant l'examen.

---

[1] Attention ! De façon à garder les neurones des étudiant(e)s en alerte, l'activité en atelier pourra être plus exigeante du point de vue mathématique que ce qui serait effectivement proposé dans une classe du secondaire ; certains ateliers devront donc s'accompagner d'une réflexion des étudiant(e)s sur la transposition nécessaire pour le secondaire.

**Les douze compétences professionnelles**
**attendues des enseignants et des enseignantes du secondaire, selon le MELS**

FONDEMENTS

1. Agir en tant que professionnelle ou professionnel héritier, critique et interprète d'objets de savoirs ou de culture dans l'exercice de ses fonctions.
2. Communiquer clairement et correctement dans la langue d'enseignement, à l'oral et à l'écrit, dans les divers contextes liés à la profession enseignante.

ACTE D'ENSEIGNER

3. Concevoir des situations d'enseignement-apprentissage pour les contenus à faire apprendre, et ce, en fonction des élèves concernés et du développement des compétences visées dans le programme de formation.
4. Piloter des situations d'enseignement-apprentissage pour les contenus à faire apprendre, et ce, en fonction des élèves concernés et du développement des compétences visées dans le programme de formation.
5. Évaluer la progression des apprentissages et le degré d'acquisition des compétences des élèves pour les contenus à faire apprendre.
6. Planifier, organiser et superviser le mode de fonctionnement du groupe-classe en vue de favoriser l'apprentissage et la socialisation des élèves.

CONTEXTE SCOLAIRE ET SOCIAL

7. Adapter ses interventions aux besoins et aux caractéristiques des élèves présentant des difficultés d'apprentissage, d'adaptation ou un handicap.
8. Intégrer les technologies de l'information et des communications aux fins de préparation et de pilotage d'activités d'enseignement-apprentissage, de gestion de l'enseignement et de développement professionnel.
9. Coopérer avec l'équipe-école, les parents, les différents partenaires sociaux et les élèves en vue de l'atteinte du développement et l'évaluation des compétences visées dans le programme de formation, et ce, en fonction des élèves concernés.
10. Travailler de concert avec les membres de l'équipe pédagogique à la réalisation des tâches permettant le développement et l'évaluation des compétences visées dans le programme de formation, et ce, en fonction des élèves concernés.

IDENTITÉ PROFESSIONNELLE

11. S'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel.
12. Agir de façon éthique et responsable dans l'exercice de ses fonctions.

À l'UQAM, nous ajoutons une compétence qui nous est propre :

13. S'approprier la réalité pluriethnique de la société québécoise et de l'école montréalaise, se sentir réellement concerné dans ses actions pédagogiques, développer les compétences de l'éducation interculturelle.

---

Comme tous les cours de didactique, le cours MAT7193, *Didactique de la géométrie*, cible plus particulièrement les compétences **1**, **3** et **7**. L'étude du logiciel GeoGebra permet également un travail de la compétence **8**. Le travail de session cible les compétences **3**, **4** et **6**. Les simulations d'enseignement permettront entre autres un travail sur la compétence **2**.

## Quelques références


Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. & Mante, M. 1992. *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon.

Berthelot, René et Salin, Marie-Hélène. 1996. *L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique*. Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n°2, pp. 417-442.

Crowley, Mary L. 1987. *The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought.* In *Learning and Teaching Geometry, K-12* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)).

Duval, Raymond. 1991. *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, n° 3, pp. 233-261.

Fischbein, Efraim. 1993. *The Theory of Figural Concept.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, pp. 139-162.

Gaud, Dominique et Guichard, Jean-P. 1984. *Apprentissage de la démonstration (géométrie de 4ème).* Petit x, n°4, pp. 5-25.

Greenberg, Marvin J. 1993 (3e édition). *Euclidean and non-Euclidean Geometries, Development and History.* (Référence en géométrie). Freeman, New-York. Cote à la bibliothèque : QA445G85.

Hartshorne, Robin. 2000. *Geometry: Euclid and beyond.* (Référence en géométrie). Springer-Verlag, New-York, collection Undergraduate Texts in Mathematics. Cote à la bibliothèque : QA451.H37.

Janvier, Claude. 1994. *Le volume, mais où sont les formules ?* Modulo Éditeur. Ville Mont-Royal, Qc.

Laborde, Colette et Capponi, Bernard. 1994. *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*. Recherches en didactiques des mathématiques. Vol. 14, n°12, pp. 165-210.

Moise, Edwin E. 1990. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* (Référence en géométrie). Éditions Addison-Wesley, Reading, Mass. Cote à la bibliothèque : QA445.M58.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). 1995. *Géométrie sous tous les angles.* Dans *Les mathématiques selon les normes du NCTM.* Trad. : Rachid El Keurti. Les Éditions de la Chenelière, Montréal.

Parzysz, Bernard. 1991. *Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée*. Recherches en didactiques des mathématiques. Vol. 11, n°23, pp. 211-240.

Tanguay, Denis. 2005. *Apprentissage de la démonstration et graphes orientés.* Annales de didactique et de sciences cognitives (IREM de Strasbourg), Vol. 10, pp. 55-93.

Tanguay, Denis. 2002. *Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire*. Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, Vol. 2, n°3, pp. 371-396.

Tanguay, Denis. 2002. *Démonstrations géométriques et vecteurs.* Revue *Envol,* n°120, pp. 45-48.

Tanguay, Denis. 2002. *L'enseignement des vecteurs.* Bulletin AMQ, Vol. XLII, n°4, pp. 36-47.


Les étudiant(e)s devront se procurer le *Recueil de textes* du cours MAT 3135, en vente à la Coop des sciences (environ 24 $ pour les membres). L'achat de la référence *Le volume, mais où sont les formules ?* (Claude JANVIER) est fortement recommandé. Ce livre est en vente à la Coop des sciences. D'autres documents (entre autres, les bilans d'activités) seront envoyés en cours de session par courriel en format PDF : à vous de lire régulièrement votre courriel UQAM.

## Liste des sujets

1. Propriétés des parallélogrammes, losanges, rectangles ; notamment de leurs diagonales. En Secondaire 1. *Défi :* autrement que comme des constats perceptifs, mais en faisant des preuves (à la portée des élèves) ou ce qui s'en rapproche, chaque fois que c'est possible.
2. Distance d'un point à une droite. La bissectrice, comme lieu des points équidistants des côtés de l'angle. Les bissectrices d'un triangle concourent au centre du cercle inscrit (en 2e cycle TS ou SN). *Défi :* introduire à la notion de « lieu de points » en distinguant et montrant bien chacune des deux implications qui vont servir dans la preuve que les bissectrices concourent ; ces deux implications étant *si sur la bissectrice, alors à égales distances ; si à égales distances, alors sur la bissectrice.*
3. Les différents cas de résolution de triangles avec la loi des sinus et la loi des cosinus. Combien de solutions, quand et pourquoi. *Défi :* discuter l'existence (ou non) des solutions à la fois algébriquement et géométriquement, en faisant les liens.
4. Les médianes d'un triangle se rencontrent au centre de gravité, situé aux 2/3 de chacune d'elles, analytiquement (c'est-à-dire en coordonnées), au 2e cycle du secondaire, TS ou SN. Attention ! En coordonnées mais sans les vecteurs, qu'on supposera non encore abordés. *Défi :* faire une preuve générale, mais sans faire « exploser les calculs », qui doivent rester digestes et que la leçon doit parvenir à faire passer.
5. Formule (ou méthode) du point de partage, au 2e cycle du secondaire, en CST. *Défi :* convaincre la classe que la formule fonctionne quand les points en cause sont dans n'importe quels quadrants, et que cette formule « gère bien » alors la question des signes.
6. Équation générale de la droite (y compris les droites verticales !) dans le plan cartésien. Explication sur ce que sont la pente et l'ordonnée à l'origine pour les droites non verticales. Droites sécantes et parallèles, en explicant bien le lien entre ce qui se passe géométriquement et la résolution du système d'équations correspondant. Droites perpendiculaires et la relation entre les pentes. Demi-plan (ouvert ou fermé) donné comme ensemble des couples solutions d'une inégalité. Au 2e cycle du secondaire, en CST. *Défi :* contextes algébrique et géométrique, mais sans référence aucune aux fonctions ; seulement des équations, inéquations et leurs solutions !
7. Écrire un quelconque vecteur de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de deux vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$, en faisant d'abord une construction géométrique à partir de laquelle on approxime la solution, puis en trouvant la solution exacte algébriquement. Convaincre que la construction est toujours possible, quand les deux vecteurs sont bien indépendants. Notion de *base* de $\mathbb{R}^2$. *Défi :* retarder l'usage (algébrique) des composantes, asseoir aussi bien que possible le sens géométrique derrière l'addition vectorielle, la multiplication par un scalaire et la dépendance linéaire dans le plan.
8. Les formules de l'aire et du volume de la sphère. *Défi :* justifier ces formules par des arguments qui sont aussi proches que possible de véritables preuves — par exemple à l'aide du Principe de Cavalieri —, mais qui restent bien sûr à la portée des élèves.
9. Tout autre sujet géométrique au choix, sous réserve de l'approbation du prof.

**Quel travail écrit s'y rapporte ?**

1. Situez le sujet dans le programme (avec ce qu'il est nécessaire d'avoir vu avant).
2. Identifiez les principaux raisonnements, ceux sur lesquels la leçon va être bâtie, ceux sur lesquels vous voulez insister.
3. Relevez les éléments terminologiques importants. Donnez les définitions impliquées.
4. Si possible (ce n'est pas toujours facile en géométrie), prévoyez les principales difficultés, fausses conceptions (ou conceptions à faire évoluer), erreurs, auxquelles les élèves seront confrontés dans leur étude du sujet.
5. Donnez le détail de la leçon, de ce que vous ferez en classe, avec notamment le détail de ce qui sera écrit au tableau dans le cours de la leçon. Essayez de faire ressortir comment vous avez pris en compte les points 2, 3 et 4.
6. Donnez trois à cinq problèmes que vous laisseriez aux élèves à la fin de votre enseignement sur le sujet.
7. Situez la leçon dans une séquence, en donnant les grandes lignes de 2 à 4 leçons qui viendraient avant et après.

---

## RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.

Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante :

http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.