Mat 7113: Surfaces de Riemann

Professeur: Olivier Collin, Bureau PK-5340, Courriel: collin.olivier@uqam.ca

Descripteur officiel : Généralités: définitions et exemples de surfaces de Riemann. Les applications holomorphes et méromorphes, leurs propriétés fondamentales. Topologie (classification des surfaces, cohomologie de Čech). Théorie algébrique: faisceaux et cohomologie. Fibrés et formes différentielles. Résolution fine d'un faisceau, théorèmes de De Rham et Dolbeault. Théorèmes de finitude. Diviseurs et fibrés en droites. Théorème de Riemann-Roch. Dualité de Serre. Théorème de Abel-Jacobi. Théorie géométrique: théorème d'uniformisation. Classification des courbes elliptiques (surfaces de Riemann de genre 1). Métrique de Poincaré et surfaces hyperboliques. Notions de théorie de Teichmüller.

Introduction : Ce cours, offert à la session Hiver 2023, se veut une introduction au sujet extrêmement vaste des surfaces de Riemann. L'immensité de ce chapitre des mathématiques peut être en partie expliquée par le fait que la notion de surface de Riemann soit intimement liée à la fois à l'Analyse complexe (fonctions méromorphes, intégrales abéliennes, fonctions spéciales, prolongement analytique), à la Géométrie algébrique (lien entre courbes algébriques projectives et surfaces de Riemann compactes, Théorème de Riemann-Roch), à l'Analyse des EDP (Equation de Poisson, Théorie de Hodge), à la Géométrie différentielle (uniformisation des surfaces de Riemann, uniformisation des surfaces riemanniennes par la courbure de Gauss), à la Physique mathématique (systèmes intégrables, symétrie mirroir), à la Théorie des nombres (courbes elliptiques, formes automorphes et fonctions theta), et la liste pourrait continuer quasi-indéfiniment.

Le point de départ de la théorie se trouve dans la thèse de doctorat de Riemann, un travail achevé en 1851, qui jette les bases du traitement géométrique de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Au cours du siècle qui suivra on peut, de manière schématique mais néanmoins assez juste, rassembler les contributions au sujet en deux approches générales distinctes: l'approche algébrique et l'approche analytique. Il est révélateur de constater que Riemann lui-même a contribué de manière fondamentale aux deux approches dans ses travaux. On peut s'amuser catégoriser les Poincaré, Klein, Schwarz, Cayley, Dedekind, Clebsch, Picard, Serre, Chevalley, Noether, Ritter, Weil, Weyl, etc selon ces deux approches.

Il en va de même pour l'inépuisable littérature sur le sujet des surfaces de Riemann: si on peut assez aisément ignorer les ouvrages se cantonnant à des considérations purement internes à la variable complexe, on pourra soit aller voir du côté algébrique (où les techniques introduites voient toute leur puissance dans le cadre beaucoup plus général des variétés algébriques) ou alors du côté analytique (à la base de nombreuses applications de l'analyse globale en géométrie et topologie).

Plan de cours : Pour un cours d'introduction aux surfaces de Riemann en un trimestre, il faut forcément faire des choix. Le plan de cours proposé consiste à partir de l'origine du sujet dans la théorie des fonctions d'une variable complexe et viser une compréhension du Théorème de Riemann-Roch selon deux approches distinctes relevant de la géométrie algébrique classique puis de l'analyse moderne. Selon son penchant personnel, chaque inscrit au cours pourra alors approfondir le sujet par des lectures personnelles autour des outils les mieux maîtrisés.

Chapitre I : Théorie élémentaire des surfaces de Riemann
- Rappels d'Analyse complexe
- Origines de la notion de surface de Riemann
- Surfaces, structures et atlas complexes, définition d'une surface de Riemann
- Exemples de surfaces de Riemann
- Lien avec les courbes algébriques planes
- Interlude : vision panoramique (suivant Eric Reyssat)
- Fonctions holomorphes et méromorphes, forme normale locale, notion de degré
- Formule de Riemann-Hurwitz
- Prolongement analytique, monodromie et Théorème d'existence de Riemann
- Calcul différentiel et intégral sur les surfaces de Riemann

Chapitre II: Géométrie algébrique classique des surfaces de Riemann
- Fonctions méromorphes et notion de diviseur sur une surface de Riemann
- Equivalence linéaire de diviseurs
- Diviseurs d'intersection, degré d'une courbe projective lisse, Théorème de Bézout
- Problèmes de Mittag-Leffler et $H^1(D)$
- Théorème de Riemann-Roch, Dualité de Serre
- Quelques applications de Riemann-Roch

Chapitre III: Analyse sur les surfaces de Riemann compactes
- Cohomologie de Čech, notion de faisceau, Lemme de Dolbeault, finitude cohomologique
- Suite exacte en cohomologie, Théorème de Dolbeault
- Nouvelle formulation de Riemann-Roch
- Dualité de Brill-Noether-Serre et conséquences

Selon le temps disponible et les intérêts exprimés par les participantes et participants au cours, des sujets spéciaux seront abordés, notamment sous forme d'exposés ou travaux personnels pour conclure ce cours d'introduction aux surfaces de Riemann.

Ouvrages bibliographiques: Il n'y a pas de manuel de référence obligatoire pour le cours mais, face à abondance de livres de qualité sur le sujet, il peut être utile de proposer une liste de lecture. Voici quelques suggestions:

Les classiques

- Ahlfors, Sario, *Riemann surfaces*, Princeton University Press (1960)
- Farkas, Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag (1980)
- Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Springer-Verlag (1981)
- Gunning, *Lectures on Riemann surfaces* (3 volumes), Princeton Mathematics Notes (1966, 1967, 1972)
- Weyl, *The concept of a Riemann surface*, Addison-Wesley (1955)

Ouvrages plus récents

- Donaldson, *Riemann surfaces*, Oxford University Press (2011)
- Jost, *Compact Riemann surfaces : an introduction to contemporary mathematics*, Springer (2006)
- Kirwan, *Complex algebraic curves*, London Mathematical Society (1992)
- Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, American Mathematical Society (1995)
- Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhäuser (1989)
- Schlag, *A course in complex analysis and Riemann surfaces*, American Mathematical Society (2014)

Quelques cours disponibles sur le web

- https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~joel.merker/Enseignement/Surfaces-de-Riemann/surfaces-de-Riemann.pdf
- https://page.math.tu-berlin.de/~bobenko/Lehre/Skripte/RS.pdf
- https://gauss.math.yale.edu/~ws442/complex.pdf
- https://math.berkeley.edu/~ianagol/complexriemann.pdf
- http://www.math.columbia.edu/~phong/complexanalysisnotes.pdf

Ouvrage à saveur historique

Henri Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann: retour sur un théorème centenaire*, École Normale Supérieure Éditions (2010)

Evaluation proposée:

- 10 Problèmes à résoudre dans les grandes lignes au cours du trimestre : 40%.
- 1 présentation orale d'une heure sur un sujet choisi en accord avec le professeur (minimum un mois de préparation) : 40%.
- Lecture de de Saint-Gervais (avec examen maison facile en fin de session) : 20%.