Mat 7032: Topologie algébrique I (Automne 2009)
Professeur: Olivier Collin, Bureau PK-5340, Courriel: collin.olivier@uqam.ca
Horaire provisoire: Mardi et Jeudi 10h00-11h30
Heures de consultation: Après le cours ou sur rendez-vous.

Introduction : Ce cours se veut une introduction à la Topologie algébrique intégrant à la fois les aspects géométriques liés à la construction d'espaces topologiques ayant des propriétés désirables ainsi que plusieurs aspects algébriques sous-jascents à la théorie de l'homologie et de l'homotopie. Le cours a été conçu pour être utile à un public aussi vaste que possible, pas uniquement aux étudiants qui se spécialiseront en Géométrie et Topologie.

Prérequis : Une certaine familiarité avec l'Algèbre abstraite enseignée au premier cycle est nécessaire. Un bref rappel de Topologie générale sera également fait au début du cours.

Plan de cours :

Chapitre I : Espaces et constructions topologiques
- Rappels de Topologie générale: espaces topologiques, séparabilité, connexité, compacité, paracompacité, homéomorphismes, topologie quotient.
- Surfaces topologiques, sphères, espaces projectifs, groupes topologiques, notion de complexe cellulaire.
- Type d'homotopie, notion de rétracte, espaces contractiles.
- Opérations sur les espaces topologiques : produit cartésien, cône, join, produits wedge et smash, suspensions, cylindre et cône d'application.
- Propriété d'extension d'homotopies et conséquences.

Chapitre II : Groupe fondamental et groupes d'homotopie
- Homotopies de chemins, groupe fondamental, propriétés fonctorielles, changement de point de référence.
- Méthodes de calcul : produits libres et amalgamés, présentations de groupes, Théorème de Seifert-Van Kampen.
- Exemples de calculs : graphes, surfaces compactes, espaces projectifs et lenticulaires, groupes topologiques, compléments de noeuds.
- Introduction aux groupes d'homotopie de dimension supérieure. Espaces fibrés et fibrations, suite exacte en homotopie.

Chapitre III : Théorie des revêtements
- Problème de relèvement des chemins et des applications.
- Exemples de revêtements et propriétés élémentaires.

- Lien au groupe fondamental et problème de classification.
- Automorphismes de revêtements, revêtements galoisiens.
- Application au Théorème de Seifert-Van Kampen.

Chapitre IV : Homologie et cohomologie
- Homologie des complexes, homotopies de chaînes, complexes libres.
- Axiomes d'une théorie de l'homologie. Un peu d'algèbre homologique.
- Réalisation des axiomes : un aperçu des homologies simpliciale, singulière et cellulaire.
- Outils de calcul : suite de Mayer-Vietoris, suites exactes d'une paire et d'un triple.
- Introduction à la cohomologie. Encore de l'algèbre homologique.
- Formule de Künneth. Théorème des coefficients universels.
- Produits et dualité de Poincaré.

Sujets complémentaires (selon le temps disponible ou encore sous forme d'exposés d'étudiants)
- Preuve topologique du Théorème fondamental de l'Algèbre.
- Applications des revêtements à la théorie des groupes. Graphes et groupes libres, espaces $K(G,1)$.
- Homologie des graphes.
- Homomorphisme d'Hurewicz.
- Invariance du domaine et Théorème du point fixe de Brouwer.
- Variétés de Grassmann comme espaces classifiants.
- Décomposition cellulaire de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ et des variétés de Grassmann.
- Suites spectrales des espaces fibrés.
- Cohomologie des espaces classifiants et classes caractéristiques.
- Cohomologie de de Rham.

Ouvrages bibliographiques: Il n'y a pas de manuel de référence obligatoire pour le cours, mais il y a une abondance de livres de qualité sur le sujet. Voici quelques suggestions:

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
(disponible au site suivant : http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf)
F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Ecole Normale Supérieure 2001-2002
(disponible au site suivant : http://www.dma.ens.fr/edition/NotesCours)
W. Massey, *A basic course in Algebraic topology*, 3rd edition, Springer (1997)
A. Dold, *Lectures on Algebraic topology*, Springer (1995)
C. Godbillon, *Eléments de Topologie algébrique*, Hermann (1998)
G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer (1997)
J. Dieudonné, *A history of Algebraic and differential topology*, Birkhaüser (1989)