PLAN DE COURS

MAT 5150 GROUPE 20 ,Théorie des ensembles (Introduction à la logique mathématique)

Mardi*(à changer) et jeudi, de 11h à 12h30.

.....

Professeur : LUC BÉLAIR
BUREAU : PK-5330, tél.: 987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca ; (mardi 15h-17h).
Page internet du cours : **http://www.moodle.uqam.ca**

Description du cours selon l'annuaire

Axiomes de Zermelo-Fraenkel. Ensembles finis et infinis. Nombres cardinaux transfinis: théorème de Cantor, théorème d'équivalence, ordre, addition, multiplication, exponentiation, hypothèse du continu, problème de la comparabilité. Ensembles totalement ordonnés et types d'ordres: addition et multiplication des types d'ordre.Ensembles bien ordonnés; induction transfinie; comparabilité, addition et multiplication des ensembles bien ordonnés; nombres ordinaux. Arithmétique des ordinaux: ordre, comparabilité, lois de calcul. Nombres ordinaux initiaux.Théorème de Zermelo et comparabilité des cardinaux. Équivalents classiques de l'axiome du choix.

Préalables : MAT2000 – Algèbre II ou MAT2011 – Analyse II ou MAT2055 – Logique et ensembles. (Avoir comlété 45 crédits du programme)

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?
(voir aussi l'échéancier ci-dessous)

« O mathématiques sévères,... Il y avait du vague dans mon esprit, un je ne sais quoi épais comme de la fumée. Vous avez mis, à la place, une froideur excessive, une prudence consommée et une logique implacable. » Lautréamont (1846-1870), *Les chants de Maldoror*.

Science du raisonnement, la logique remonte au moins à l'Antiquité. C'est lorsqu'on a fait de ses objets d'études des objets mathématiques qu'a pu émerger une « logique mathématique ». Depuis, la logique mathématique s'est développée en une discipline mathématique autonome. Depuis une trentaine d'années ses liens avec l'informatique se sont resserrés.

Le cours sera axé sur les notions et méthodes de base de la logique mathématique et quelques uns de ses résultats fondamentaux. (voir l'échéancier approximatif ci-dessous)

Objectifs généraux Que vise ce cours?

Contribuer à la synthèse de vos connaissances mathématiques en mettant en évidence comment des résultats d'origines variées peuvent contribuer à résoudre un même problème. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement

- À chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion. Les sections appropriées du manuel seront indiquées pour la fois suivante. Cette lecture fait partie du cours.
- Le cours aura un site internet dans le système **Moodle http://www.moodle.uqam.ca** . Il contiendra toute l'information reliée au cours (pages à lire, exercices, solutionnaires, etc.)
- Des exercices vous seront donnés au fil des cours. Un solutionnaire sera éventuellement disponible dans le site internet du cours.
- Chaque semaine, **le mardi de 15h à 17h vous est réservé pour consultation à mon bureau**. En cas de difficulté d'horaire, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

CONTENU & ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

I. *LANGAGES ET THÉORIES DU PREMIER ORDRE* (2 semaines)

- calcul propositionnel, arbre associé à une formule et lecture unique ;
- structures, langages du premier ordre et leurs réalisations ;
- termes et formules ;
- sous-structures et extensions, extensions élémentaires.

II. *THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE COMPLÉTUDE ET DE COMPACITÉ* (3 semaines)

- système de démonstration formelle ;
- théorème de complétude ;
- théorème de compacité ;
- formules préservées par sous-structures ;
- modèles non standards de théories classiques (par ex. l'arithmétique, les nombres réels).

III. *CALCULABILITÉ* (4 semaines)

- fonctions et ensembles récursifs primitifs ;
- fonctions récursives ;
- fonction d'Ackermann ;
- ensembles récursivement énumérables.

IV. Choix entre *THÉORÈMES DE GÖDEL* ou *APPLICATIONS ÉLÉMENTAIRES*
(6 semaines)

- théorèmes de Gödel : incomplétude et indécidabilité de l'arithmétique.
- applications élémentaires : algèbre, géométrie, analyse, théorie des ensembles, informatique théorique, etc.

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire. La note de passage du cours est fixée à 60%.

(A) Description sommaire	Échéance	Pondération
- Devoirs (3)	à déterminer	20%
- Exposé	2e moitié de session	5%
- Examen de mi-session	22 octobre	35%
- Examen final	17 décembre	40%

(B) Description détaillée

Les devoirs
Ils visent à faire intégrer les concepts et calculs de base à tous les niveaux. Des exercices seront donnés au fil du cours et les questions de devoir seront choisis parmi eux. Il y aura trois séries de questions à remettre.

Critères d'évaluation des devoirs
- Exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- Exactitude des calculs ;
- Jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique, qualité du français (0,5% par faute).

Présentation matérielle des devoirs. Les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format lettre (21,7cm x 28cm) agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type**. Le code permanent de chaque étudiant_e doit apparaître sur la copie.

Remise des devoirs. Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans le site internet du cours. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans internet.

L'exposé
Durée : 1 heure. *Sujets :* les sujets seront choisis selon le thème abordé dans la dernière partie du cours (voir échéacier approximatif). Chaque exposé s'intègrera dans la matière du cours.
Critères d'évaluation : exactitude mathématique, clarté et qualité d'expression. Vous devrez me rencontrer pour déterminer plus précisément le sujet et une date, et au moins une autre fois, au moins une semaine avant votre exposé, pour me faire un résumé oral et me remettre un résumé écrit de votre exposé.

Les examens
Les examens sont de type traditionnel. Aucune documentation permise. Seules les calculatrices non programmables avec les fonctions mathématiques de base sont permises. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php).
Examen de mi-session. L'examen de mi-session sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. *Durée* : 2 heures.
Examen final. L'examen final porte sur toute la matière, mais surtout celle vue depuis l'examen de mi-session. *Durée* : 3 heures. *Critère d'évaluation des examens :* exactitude de la solution comme telle, exactitude du raisonnement amenant à la solution, exactitude des calculs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique, tome 1*, Masson, 1993. (QA9C67)(*)
(2e édition, Dunod, 2003, pas essentiellement différente de la 1re édition).

LECTURES RECOMMANDÉES

R. Blanché, *L'axiomatique*, Presses Universitaires de France, 1967. (BC71B58 ; aussi au laboratoire de didactique, PK-4950) (Réédition, 2009)

A. Tarski, *Introduction à la logique*, Gauthiers-Villars, 1969. (QA9T2814)
(Réédition, Editions Jacques Gabay, 2008)

R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique, tome 2*, Masson, 1993. (QA9C67)(*)
(2e édition, Dunod, 2003, pas essentiellement différente de la 1re édition).
N.B. Pour le chapitre 5, et le cas échéant le chapitre 6.

ENVIRON DU MÊME NIVEAU QUE LE COURS

J.-P Azra et B. Jaulin, *Récursivité*, Gauthiers-Villars, 1973
J.R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, 1967. (QA9S50).
(Réédition, A.K. Peters / Association for Symbolic Logic, 2001)

PRÉALABLES

A.I. Kostrikin, *Introduction à l'algèbre*, M.I.R., 1981. (QA154.2K6714).
D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipse, 1996. (QA154.2K8514)
http://exo7.emath.fr/ : cours et exercices de mathématiques.

D'INTÉRÊT GÉNÉRAL

D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie*, Dunod, 1971. (QA681H58)
G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème,* Dunod, 1962. (QA11P614)
H. Rasiowa et R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, Polish Scientific Publ. Warszawa, 1968. (QA9R25 1968).
http://images.math.cnrs.fr/ : la recherche mathématique en mots et en images.

RENSEIGNEMENTS

Le livre de Cori et Lascar sera disponible à la COOP-UQAM (pavillon Président Kennedy, 201 av. du Président Kennedy, local PK-M320). Surveillez les locaux spéciaux de la rentrée.

Les livres suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (pavillon CO) et peuvent être consultés sur place. Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles à la Bibliothèque des sciences.