MAT3550 : Courbes algébriques
Professeur : Olivier Collin, Bureau : PK-5340, Courriel : collin.olivier@uqam.ca
Horaire : Mardi 13h30-15h et Jeudi 11h-12h30
Heures de disponibilité : Le lundi ou vendredi matin, sur rendez-vous, entre 9h et 12h.

Objectifs du cours : Le but de ce cours est de faire l'étude de la théorie élémentaire des courbes algébriques dans le plan projectif. Ceci constitue une jolie application de savoirs algébriques à des problèmes géométriques dont les fondements remontent à plus de trois siècles, avec comme point culminant le Théorème de Bézout établissant que deux courbes algébriques de dégrés respectifs m et n s'intersectent $m \cdot n$ fois dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. On peut par ailleurs voir ce cours comme une introduction élémentaire à la géométrie algébrique, précédent l'introduction des notions générales de variétés algébriques, schémas ainsi que les méthodes cohomologiques qui pourront être vues au niveau Maîtrise.

Pré-requis : MAT2400 Géométries. On supposera une certaine familiarité avec la notion d'espace projectif ainsi que les bases de la théorie des anneaux.

Plan de cours :

Chapitre I : Courbes algébriques : exemples et motivation
- I.1 Plans affine et projectif et leurs transformations.
- I.2 Premiers exemples de courbes algébriques, coniques et cubiques.

Chapitre II : Interlude d'Algèbre
- II.1 Décomposition de polynômes.
- II.2 Un outil important : le résultant de deux polynômes.

Chapitre III : Théorie élémentaire des courbes algébriques.
- III.1 Courbes affines et courbes projectives.
- III.2 Composantes irréductibles d'une courbe algébrique, notion de diviseur.
- III.3 Multiplicité d'intersection entre une courbe et une droite.
- III.4 Singularités et notion d'ordre d'un point sur une courbe.

Chapitre IV : Théorie de l'intersection des courbes algébriques
- IV.1 Multiplicité d'intersection et Théorème de Bézout.
- IV.2 Borne supérieure sur le nombre de points singuliers.
- IV.3 Points d'inflexion d'une courbe algébrique.

IV.4 Une approche axiomatique de la multiplicité d'intersection.
IV.4 Quelques résultats classiques de Géométrie projective.

Chapitre V : Sujets spéciaux
Selon le temps disponible on abordera certains des sujets suivants lors d'exposés magistraux ou de présentations faites par les étudiants : systèmes linéaires de courbes, courbes rationnelles, courbes duales et formules de Plücker, courbes elliptiques, formule du genre, inégalité de Harnack, Nullstellensatz de Hilbert.

Ouvrages de référence :

G. Fischer, *Plane Algebraic Curves*, American Mathematical Society Press.

C. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves*, Cambridge University Press.

E. Brieskorn, H. Knorrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhauser.

R. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton University Press.

F. Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press.

Evaluation proposée :

(1) 2 devoirs : 40% de la note finale.
(2) 1 examen : 40% de la note finale.
(3) Présentation orale en fin de session : 20% de la note finale.