PLAN DE COURS

MAT 3510 GROUPE 10 ,SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

THÈME : LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Lundi et mercredi, de 13h30 à 15h, SH-3120.

.....

Professeur : LUC BÉLAIR
BUREAU : PK-5330, tél.: 987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca ; (mardi 15h-17h).
Page internet du cours : **http://www.moodle.uqam.ca**

Description du cours selon l'annuaire
Introduire les étudiants à des thèmes mathématiques plus spécialisés dans un contexte de séminaire où ils apprennent également à travailler en groupe selon une pratique commune en recherche mathématique. Le contenu est variable parmi les différentes théories mathématiques, selon les spécialités du professeur enseignant le cours et les intérêts des étudiants. Le format des rencontres est flexible, les étudiants sont encouragés à lire de manière indépendante sur une thématique, à présenter en classe les résultats de leur étude et à discuter la résolution de problèmes choisis.
Préalables : Avoir complété 54 crédits du programme.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?
(voir aussi l'échéancier ci-dessous)

« O mathématiques sévères,... Il y avait du vague dans mon esprit, un je ne sais quoi épais comme de la fumée. Vous avez mis, à la place, une froideur excessive, une prudence consommée et une logique implacable. » Lautréamont (1846-1870), *Les chants de Maldoror*.

Cette session-ci, le thème du séminaire de mathématique est la logique mathématique. Science du raisonnement, la logique remonte au moins à l'Antiquité. C'est lorsqu'on a fait de ses objets d'études des objets mathématiques, au 19e siècle, qu'a pu émerger une « logique mathématique ». Depuis, la logique mathématique s'est développée en une discipline mathématique autonome. Depuis une trentaine d'années ses liens avec l'informatique et le reste des mathématiques se sont resserrés.

Le cours sera axé sur les notions et méthodes de base de la logique mathématique et quelques uns de ses résultats fondamentaux. (voir l'échéancier approximatif ci-dessous)

Objectifs généraux Que vise ce cours?
Contribuer à la synthèse de vos connaissances mathématiques en mettant en évidence comment des résultats d'origines variées peuvent contribuer à résoudre un même problème. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement
- À chaque séance il y aura un exposé du professeur ou d'un étudiant, avec questions et discussion. Les sections appropriées du manuel seront indiquées pour la fois suivante. **Cette lecture fait partie du cours et les séances seront organisées en supposant que cette lecture a été faite de façon active.**
- Le cours aura un site internet dans le système **Moodle http://www.moodle.uqam.ca** . Il contiendra toute l'information reliée au cours (pages à lire, exercices, solutionnaires, etc.)
- Des exercices vous seront donnés au fil des cours. Les devoirs seront choisis parmi ces exercices.
- Chaque semaine, **le mardi de 15h à 17h vous est réservé pour consultation à mon bureau**. En cas de difficulté d'horaire, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

CONTENU & ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

« Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. » Clairaut (1713-1765), *Élémens de géométrie,* 1741.
« C'est dans la cuve gauche du fondoir du Péquod (…) que je fus frappé pour la première fois – indirectement – par le fait remarquable qu'en géométrie tous les corps glissant le long d'une cycloïde – ma pierre à polir par exemple – arrivent au bas de n'importe quel point en un temps identique. » Melville (1819-1891), *Moby Dick,* 1851.

I. *LANGAGES ET THÉORIES DU PREMIER ORDRE* (4 semaines)

- calcul propositionnel, arbre associé à une formule et lecture unique;
- structures, langages du premier ordre et leurs réalisations;
- termes et formules;
- sous-structures et extensions, extensions élémentaires
- morphismes et isomorphismes des structures du premier ordre.

II. *THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE COMPLÉTUDE ET DE COMPACITÉ* (3 semaines)

- système de démonstration formelle;
- théorème de complétude;
- théorème de compacité;
- modèles non standards de théories classiques (par ex. l'arithmétique, les nombres réels).

III. CHOIX parmi les thèmes suivants (7 semaines)

– théorèmes de Gödel : calculabilité, incomplétude et indécidabilité de l'arithmétique (7 semaines);
– structures et théories décidables/indécidables (interprétration d'une théorie dans une autre, décidabilité par automates);
– le 10e problème de Hilbert (7 semaines);
– structures o-minimales : notions de base et application en géométrie diophantienne (théorème de Pila) (7 semaines);
– utilisation des corps finis pour résoudre des questions sur les corps infinis (ultraproduits);
– applications aux équations algébriques dans les corps locaux (ultraproduits, théorèmes d'Ax-Kochen-Ershov);
– autres applications : algèbre, géométrie, analyse, théorie des ensembles, informatique théorique, etc., selon le niveau de préparation des étudiants.

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire. La note de passage du cours est fixée à 60%.

(A) Description sommaire	Échéance	Pondération
- Devoirs (3)	à déterminer	24%
- Exposé	2e moitié de session	6%
- Examen de mi-session	14 octobre	35%
- Examen final	21 décembre	35%

(B) Description détaillée

Les devoirs
Ils visent à faire intégrer les concepts et calculs de base à tous les niveaux. Des exercices seront donnés au fil du cours et les questions de devoir seront choisis parmi eux. Il y aura trois séries de questions à remettre. Les devoirs peuvent être fait en équipe de deux (une seule copie remise).

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- Exactitude des calculs ;
- Jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique, qualité du français (0,5% par faute).

Consignes. Les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format lettre, agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type**. Le code permanent de chaque étudiant_e doit apparaître sur la copie en haut à droite. **Aucun devoir de la qualité d'un brouillon ne sera accepté.** Les consignes propres à chaque devoir.

Remise des devoirs. Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans le site internet du cours. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans internet.

L'exposé
Pour ce travail vous devez vous regrouper en équipe de deux personnes. L'exposé comme tel peut être donné par les deux membres de l'équipe ou un seul. *Durée* : 1 heure. *Sujets* : les sujets seront choisis selon les thèmes abordés dans la dernière partie du cours (voir échéancier approximatif). Chaque exposé s'intègrera dans la matière du cours.
Critères d'évaluation : exactitude mathématique, clarté et qualité d'expression. Vous devrez me rencontrer pour déterminer plus précisément le sujet et une date, et au moins une autre fois, au moins une semaine avant votre exposé, pour me faire un résumé oral et me remettre un résumé écrit avec un plan de votre exposé. Les exposés seront évalués par Succès/Échec avec possibilité de reprise (le cas échéant avec un ajustement du sujet).

Les examens
Les examens sont de type traditionnel. Aucune documentation permise. Aucun téléphone, ordinateur, etc. permis. Seules les calculatrices non programmables avec les fonctions mathématiques de base sont permises. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php).
Examen de mi-session. L'examen de mi-session porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. *Durée* : 3 heures.
Examen final. L'examen final porte sur les éléments de la logique du 1er ordre vus dans les diverses activités du cours (exposés des étudiants compris). *Durée* : 3 heures.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique, tome 1*, Masson, 1993. (QA9C67)(*)
(2e édition, Dunod, 2003, pas essentiellement différente de la 1re édition).

LECTURES RECOMMANDÉES

R. Blanché, *L'axiomatique*, Presses Universitaires de France, 1967. (BC71B58 ; aussi au laboratoire de didactique, PK-4950) (Réédition, 2009)

A. Tarski, *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars, 1969. (QA9T2814)
(Réédition, Editions Jacques Gabay, 2008)

R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique, tome 2*, Masson, 1993. (QA9C67)(*)
(2e édition, Dunod, 2003, pas essentiellement différente de la 1re édition).

ENVIRON DU MÊME NIVEAU QUE LE COURS

J.-P Azra et B. Jaulin, *Récursivité*, Gauthier-Villars, 1973. (QA248.5A97) (*)
J.R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, 1967. (QA9S50).
(Réédition, A.K. Peters / Association for Symbolic Logic, 2001)

AUTRES

M. Beeson, P. Boutry et J. Narboux, Herbrand's theorem and non-euclidean geometry, Bulletin of Symbolic Logic 21 (2015) pp 111–122. doi:10.1017/bsl.2015.6
L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge Univ. Press, 1998. (QA611V27)
Y. Matiyasevich, *Le dixième problème de Hilbert, son indécidabilité*, Masson, 1995. (QA242M37714.1995)
A. Tarski , avec A. Mostowski et R. Robinson, *Undecidable theories*, North-Holland, 1968. (QAT33)
T. Scanlon, A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic [after Pila, Wilkie and Zannier], (Séminaire Bourbaki, vol. 2010/2011, exposés 1027–1042), *Astérisque* No 348 (2012) , exposé no. 1037, ix, pp. 299–315.

PRÉALABLES

A.I. Kostrikin, *Introduction à l'algèbre*, M.I.R., 1981. (QA154.2K6714).
D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipse, 1996. (QA154.2K8514)
http://exo7.emath.fr/ : cours et exercices de mathématiques.

D'INTÉRÊT GÉNÉRAL

D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie*, Dunod, 1971. (QA681H58)
G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème,* Dunod, 1962. (QA11P614)
H. Rasiowa et R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, Polish Scientific Publ. Warszawa, 1968. (QA9R25 1968).
http://images.math.cnrs.fr/ : la recherche mathématique en mots et en images.

RENSEIGNEMENTS

Le livre de Cori et Lascar sera disponible à la COOP-UQAM (pavillon Président Kennedy, 201 av. du Président Kennedy, local PK-M320), pour environ 69 $.

Les livres suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (pavillon CO) et peuvent être consultés sur place. Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles à la Bibliothèque des sciences (ou à la Bibliothèque centrale).

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.
Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante :
http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php
Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique	**Article 3 - Sanctions**
2.1 Infraction Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement. *2.2 Liste non limitative des infractions* Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer : a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité; b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence; c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant; d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen; e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques; f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne; g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle; h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation; i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances; j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.	*3.1 L'attribution de la mention «P»* L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier. Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes. *3.2 La mise en probation et autres sanctions* a) la *mise en probation;* La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement. La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée. Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes **:** b) l'échec au cours ou à l'activité créditée; c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés; d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs; e) son expulsion définitive de l'Université.