Université du Québec à Montréal, **Christophe Hohlweg**
Département de Mathématiques

PLAN DE COURS
MAT3510 groupe 10 Séminaire
GROUPES DE COXETER

Lundi et mardi, 11h00-12h30, via *zoom*
Du 18 janvier au 4 mai 2021 inclus

Professeur : Christophe Hohlweg
Courriel : hohlweg.christophe@uqam.ca
Page internet : hohlweg.math.uqam.ca
Page internet du cours :
http://hohlweg.math.uqam.ca/2020/12/16/mat2250-theorie-des-groupes-2018-2/

DESCRIPTION DU COURS : Ce cours se veut une invitation à l'étude des aspects combinatoires géométriques et algébriques des groupes de Coxeter. Les groupes de Coxeter aparaissent naturellement comme groupes engendrés par des réflexions en géométrie. Ils apparaissent ainsi dans presque tous les domaines des mathématiques : théorie de Lie (algèbre de Lie, algèbre de Kac-Moody), théorie de la représentation, topologie de basse dimension, combinatoire et la théorie géométrique des groupes. Les premiers exemples de ces groupes sont les groupes symétriques, les groupes diédraux ou encore les groupes d'isométries de polyèdres particuliers.

Une des particularités de ces groupes est qu'ils admettent une présentation simple par générateurs et relations qui permet d'étudier les éléments de ces groupes comme des *mots réduits* sur un alphabet particulier. De plus, à chaque réflexion d'un groupe de Coxeter est associé une *racine*. Les liens combinatoires entre racines et mots jouent un rôle fondamental dans l'étude de ces groupes. Une illustration importante de ces liens est la rationalité du langage des éléments d'un groupe de Coxeter et de la notion d'automates qui y est associé.

OBJECTIF DU COURS :

Le but de ce cours est multiple : (1) de donner une connaissance suffisamment large de ces groupes, d'un point de vue algébrique, géométrique et combinatoire ; (2) de mettre en pratique les connaissances acquises en géométrie et théorie des groupes ; (3) d'aborder l'un ou l'autre des nombreux problèmes ouverts concernant ces groupes.
PRÉALABLES : Algèbre linéaire I et II. Notions de théorie des groupes et de géométrie.

CONTENU DU COURS :

Bloc 1 : Rappel de théorie des groupes (présentation par générateurs et relations) et de géométrie (espaces euclidiens et euclidiens affines, isométries,). Exemples : Groupes diédraux et symétriques comme groupes engendrés par des réflexions ; présentations par

gén erateurs et relations associées. Groupes engendrés par un nombre fini de réflections dans un espace euclidien (affine ou non).

Bloc 2 : Groupes de Coxeter, conditions d'échange et de réduction, problèmes des mots et de conjugaison. Graphe de Cayley et ordre faible (weak order) ; structure de treillis (théorème de Björner). Ombres de Garside et automates.

Bloc 3 : Représentation géométrique, système de racines et arrangements de Coxeter. Ensembles d'inversions et interprétation de la longueur et de l'ordre faible. Petites racines, éléments minimaux et arrangements de Shi.

Contenu des apprentissages :

Chaque séance du cours fera l'objet d'un exposé avec questions et discussions. Les notes du cours seront disponibles en ligne après chaque séances.

Au début de la séance du lundi, nous discuterons des exercices donnés le mardi de la semaine précédente.

Bibliographie : Aucun livre n'est requis. Je m'inspire des publications suivantes.

— J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in Adv. Mathematics **29** (1990). Chapitre 1, 2, 5 et possiblement 6.
— A. Björner et F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate texts in Mathematics **231**, Springer (2005). Les chapitres 1 Ã 4.
— C. Hohlweg, J. P. Labbé and V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups*, *Canadian. J. of Math.* **66**, (2014), 323–353.
— A. Borovik and A. Borovik, Mirrors and Reflections, Universitext, Springer (Ce livre contient des exercices corrigés.)

Evaluation

Trois devoirs comptant pour 30% chaque à rendre par courriel avant minuit, heure de Montréal, le : 8 mars (Devoir 1), 5 avril (Devoir 2), 9 mai (Devoir 3).

Le 10% restant sera attribué au meilleur devoir des trois qui comptera donc pour 40%.

Chaque jour de retard dans la remise d'un devoir entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.

Consignes :

— *Le nombre de page maximum permis sera spécifié lors de la distribution de l'énoncé. Ce devoir devra être rédigé sur du papier format lettre. Vous pouvez aussi rédiger ces devoirs sous LaTeXavec des caractères de taille 12pt, des marges d'au moins 2,5cm de tous les cotés et en format 1.5 interlignes..*

— **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ.**

Critères d'évaluations du devoir :
— *Respect des consignes*
— *Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs)*
— *Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques*
— *Voir le règlement concernant le plagiat à la fin de ce texte*