Mat 3505 : Séminaire de mathématiques

Introduction à la topologie différentielle

Professeur : Olivier Collin, Bureau : PK-5340, Courriel : collin.olivier@uqam.ca

Horaire : Lundi et Mardi 11h-12h30

Heures de disponibilité : Après le cours ou sur rendez-vous.

Objectifs du cours : Le but de ce cours est d'introduire les variétés lisses plongées dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ ainsi que diverses notions utiles pour en étudier certaines de leurs propriétés topologiques. En particulier on cherchera à développer l'étude des applications lisses entre variétés au travers de concepts tels ceux de valeur régulière et critique, degré de Brouwer, transversalité et stabilité, homotopie et isotopie, champs de vecteurs et singularités, classification topologique des courbes et surfaces lisses par la théorie de Morse. Diverses applications à des résultats fondamentaux en mathématiques (Théorème du point fixe de Brouwer, Théorème fondamental de l'algèbre, Théorème de Poincaré-Hopf, etc) seront également données.

Pré-requis : Normalement avoir complété 54 crédits du Baccalauréat en mathématiques. On supposera une certaine familiarité avec les notions usuelles de calcul différentiel en plusieurs variables et d'algèbre linéaire.

Plan de cours :

Partie I : Etude détaillée du livre J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*

Chapitre I : Variétés lisses et applications lisses (environ 6 cours)

- I.1 Contexte historique, rappels de calcul différentiel, notion de variété et exemples.
- I.2 Espace tangent à une variété et dérivées d'applications.
- I.3 Immersions, submersions, plongements, valeurs régulières et critiques.
- I.4 Théorèmes de Sard et de Brown.
- I.5 Applications : Théorème fondamental de l'algèbre et Théorème du point fixe de Brouwer.

Chapitre II : Degré modulo 2 et degré de Brouwer (environ 6 cours)

- II.1 Homotopies et isotopies.
- II.2 Notion de degré modulo 2 et intersection de sous-variétés.
- II.3 Notion d'orientation sur une variété.
- II.4 Nombre d'intersection, degré de Brouwer et invariance homotopique.

Chapitre III : Applications topologiques du degré de Brouwer (environ 8 cours)

III.1 Champs de vecteurs lisses sur une variété, singularités.

III.2 Cas des sphères S^n.

III.3 Indice d'un champ de vecteurs et Théorème de Poincaré-Hopf.

III.4 Construction de Pontryagin et Théorème du degré de Hopf.

Partie II : Sujets spéciaux

Selon le temps disponible après avoir couvert en détail l'ouvrage classique de Milnor, nous aborderons certains thèmes complémentaires parmi les suivants :

- Transversalité, homotopie et stabilité.
- Théorème de plongement de Whitney.
- Indice d'un lacet et Théorème de séparation de Jordan-Brouwer.
- Théorème de Borsuk-Ulam.
- Nombre et théorème du point fixe de Lefschetz.
- Notion de fonction de Morse sur une variété.
- Classification topologique des variétés de très petite dimension.

Références bibliographiques : Le cours s'articulera autour des deux textes suivants :

J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press (1997)

V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology*, AMS Chelsea Publishing, Providence (2010)

Ces livres peuvent être achetés facilement sur le web au prix d'environ $50-60$\$ ou alors vous pourrez aisément en trouver une version originale en format PDF à partir d'une recherche sur *Google*.

Evaluation proposée et ventilation de la note finale :

(1) 3 devoirs (ordonnés par note décroissante : 20% + 15% + 5%) comptant 40%.

(2) 1 examen à la fin de la Partie I comptant pour 30%.

(3) 1 présentation orale d'une heure sur un sujet de la Partie II comptant pour 30%.