Université du Québec à Montréal, **Automne 2014**
Département de Mathématiques

PLAN DE COURS (Tentative)
MAT3500 groupe 10 Séminaire
COMBINATOIRE DES GROUPES DE COXETER

Lundi et mercredi, 13h30-15h00, local SH-3720
Du 2 septembre au 17 décembre 2014

Professeur : Christophe Hohlweg
Bureau : PK-4230 (lundi de 15h à 16h30 après le cours, les mercredis de 10h30 à 12h00)
Téléphone : 514-987-3000 poste 2566
Courriel : hohlweg.christophe@uqam.ca
Page internet du cours : http://hohlweg.math.uqam.ca/?p=985

DESCRIPTION DU COURS : Ce cours se veut une invitation à l'étude de la combinatoire des groupes de Coxeter. Les groupes de Coxeter aparaissent naturellement comme groupes engendrés par des réflexions en géométrie. Ils apparaissent ainsi dans presque tous les domaines des mathématiques : théorie de Lie (algèbre de Lie, algèbre de Kac-Moody), théorie de la représentation, topologie de basse dimension, combinatoire et la théorie géométrique des groupes. Les premiers exemples de ces groupes sont les groupes symétriques, les groupes diédraux ou encore les groupes d'isométries de polyèdres particuliers.

Une des particularités de ces groupes est qu'ils admettent une présentation simple par générateurs et relations qui permet d'étudier les éléments de ces groupes comme des *mots réduits* sur un alphabet particulier. De plus, à chaque réflexion d'un groupe de Coxeter est associé une *racine*. Les liens combinatoires entre racines et mots jouent un rôle fondamental dans l'étude de ces groupes. Une illustration importante de ces liens est la rationalité du langage des éléments d'un groupe de Coxeter dont Philippe Nadeau, chercheur au CNRS à Lyon en France, viendra nous parler au cours de la session.

OBJECTIF DU COURS :

Le but de ce cours est multiple : (1) de donner une connaissance suffisamment large de ces groupes, d'un point de vue algébrique, géométrique et combinatoire ; (2) de mettre en pratique les connaissances acquises en géométrie et théorie des groupes ; (3) d'aborder l'un ou l'autre des nombreux problèmes ouverts concernant ces groupes. Les problèmes choisis pour aborder ce cours sont la question de la classification des groupes de réflexion finis (Coxeter), puis celle de la régularité du langage des mots réduits (Brink-Howlett) dans le cas des groupes de réflexion infinis.

PLAN DÉTAILLÉ (TENTATIVE) :

Bloc 1 (semaines 1 à 3) : Rappels : Espaces vectoriels euclidiens de dimension finie, isométrie, réflexions, décomposition des isométries, groupe liéaire et orthogonal. Le problème de la classification des isométries. Groupes engendrés par des réflexions (problème de classification), premiers exemples : groupes diédraux, groupes symétriques, groupes hyperoctaédraux, groupe de type D. Rappel et complément de théorie des groupes, présentation des groupes par générateurs et relations (groupes libres, propriété universelle, générateurs et relations), exemples.

Bloc 2 (semaine 4 et 5) : *Groupes de réflexion/Coxeter finis.* Système de racine, conditions d'échange et de réduction, présentation par générateurs et relations, sous-groupes paraboliques, graphe de Coxeter et classification.

Bloc 3 (semaine 6 et 7) : Groupe de Coxeter infinis, systèmes de racines infinis et combinatoire des mots réduits. *Devoir à rendre le lundi 27 octobre en classe.*

Bloc 4 (semaine 8 à 11) : **Visite de Philippe Nadeau, Chercheur au CNRS et à l'Université Claude Bernard, Lyon 1, France**. Philippe Nadeau nous parlera de la rationalité des mots réduits dans les groupes de Coxeter ainsi que des éléments pleinement commutatifs, sujet dont il est l'un des spécialistes mondiaux. En particulier, ils nous parlera du "root poset" et de la profondeur des racines, des petites racines, de l'automate associé à un groupe de Coxeter, des éléments pleinement commutatifs, rationalité de ces éléments et des séries rationnelles associées.

Bloc 5 (semaine 12 à 15) : Ordre faible et ordre de Bruhat ; problèmes ouverts concernant la combinatoire des groupes de Coxeter infinis. *Examen final.*

CONTENU DES APPRENTISSAGES :

Chaque séance du cours fera l'objet d'un exposé avec questions et discussions.

La quatrième scéance, toutes les deux semaines, sera dédiée à la correction d'exercices distribués en classe le lundi de la semaine précédente.

BIBLIOGRAPHIE :

- A. Björner et F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate texts in Mathematics **231**, Springer (2005).
- R. Biagioli, F. Jouhet et P. Nadeau P, *Fully commutative elements in finite and affine Coxeter groups*, `arXiv.CO:1402.2166`. To be published in Monastshefte für Mathematik

Je m'inspirerais aussi de :

- J. E. HUMPHREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in Adv. Mathematics **29** (1990).

- C. Hohlweg, J. P. Labbé and V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups*, *Canadian. J. of Math.* **66**, (2014), 323–353.

Autres références sur ce sujet (et dont je pourrais éventuellement m'inspirer) :

- C. Hohlweg, *Permutahedra and Associahedra : Generalized associahedra from the geometry of finite reflection groups in* 'Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures', Tamari Memorial Festschrift, editors F. Mueller-Hoissen, J. Pallo and J. Stasheff, Progress in Mathematics, vol. 299, (Birkhauser, 2012), 129–159.
- A. Borovik and A. Borovik, Mirrors and Reflections, Universitext, Springer (Ce livre contient des exercices corrigés.)
- N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6*, Masson (1981).
- M. GECK ET G. PFEIFFER, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*, London Math. Soc. Monographs New Series **21**, Oxford Science Publ. (2000).

Evaluation

- **Un devoirs : 40%**
  - Ce devoir sera à remettre le lundi 27 octobre en classe.

  Chaque jour de retard entraîne une pénalité de 10%. Par exemple, une journée de retard sur un devoir noté sur 20 équivaut à un retrait de 2 points de la note finale du devoir.

  Ce devoir vise les objectifs suivants :

  1. Apprendre à écrire des mathématiques, à résoudre des problèmes, et à en communiquer clairement la solution.
  2. Apprendre à rédiger des articles de qualité professionnelle.

  Consignes :
  - Le nombre de page maximum permis sera spécifié lors de la districution de l'énoncé. Ce devoir devra être rédigé sur du papier format lettre ligné et broché. Vous pouvez aussi rédiger ces devoirs sous LaTeX(voir détails sur la page internet du cours).
  - **AUCUN DEVOIR DE LA QUALITÉ D'UN BROUILLON NE SERA ACCEPTÉ.**
  - Les consignes propres au devoir.

  Critères d'évaluations du devoir :
  - Respect des consignes
  - Clarté de la rédaction, de la présentation et exactitude du raisonnement amenant à la solution (comprend l'exactitude des calculs)
  - Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques
  - Voir le règlement concernant le plagiat à la fin de ce texte

- **Participation, présence et présentation de la solution d'un ou d'exercices : 30%**
  * Durée : 25 minutes.
  * Lieu et date : SH-3720, la date sera déterminé au moins une semaine à l'avance.
  Critères d'évaluations :
  - présence et participation au cours.
  - Clarté de l'expression orale et exactitude du raisonnement amenant à la solution
  - Qualité de la présentation au tableau.
- **Un examen final récapitulatif : 30%**
  * Durée : deux heures (13h-15h)
  * Lieu et date : mercredi 10 décembre de 13h à 15h au SH-3720.
  * Vous rendrez ce que vous avez fait en classe au bout des deux heures, et le reste des questions sera à traiter en devoir à rendre le mercredi 17 décembre à 13h30 lors du dernier cours en classe, tout retard entrainera la perte de 10% par jour à compter du 17 décembre à 13h30. Si vous le désirez, vous pouvez traiter à nouveau les questions que vous aviez traitées en classe. Le nombre maximal de pages sera précisé lors de l'examen.
  * Le lundi 15 décembre je serais disponible dans la salle du cours afin de répondre à d'éventuelles questions **précises** ou bien afin de jeter un coup d'oeil informel à votre travail et ainsi vous suggérer des pistes afin de le parfaire pour le 17 décembre.
  Dans le cas de cet examen, calculatrice, ordinateur, téléphone, tablette etc. est interdite. L'utilisation de vos notes de cours est permises.
  Critères d'évaluations :
  - Clarté de la rédaction et exactitude du raisonnement amenant à la solution
  - Qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques

PLAGIAT

Règlement no 18 sur les infractions de nature académique

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie ou falsification de document commis par une étudiante, un étudiant, de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen ou d'un travail faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constituent une infraction au sens de ce règlement

La liste non limitative des infractions est définie comme suit :

- la substitution de personnes ;
- l'utilisation totale ou partielle du texte d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence ;
- la transmission d'un travail pour fins d'évaluation alors qu'il constitue essentiellement un travail qui a déjà été transmis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant ;
- l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen ou de tout autre document ou matériel non autorisés, ou encore d'une évaluation non méritée ;
- la possession ou l'utilisation, avant ou pendant un examen, de tout document non autorisé ;
- l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen d'une autre personne ;
- l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle ;
- la falsification d'un document, notamment d'un document transmis par l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances ;
- la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Les sanctions reliées à ces infractions sont précisées à l'article 3 du Règlement no 18

Pour plus d'information sur les infractions académiques et comment les prévenir : http://r18.uqam.ca/