Université du Québec à Montréal — Département de Mathématiques

# MAT-3071 . PROCESSUS STOCHASTIQUES

Session : Hiver 2013
Groupe : 010
Professeur : Fabrice Larribe
Bureau : PK-5515
Courriel : larribe.fabrice@uqam.ca
Page Web : http://www.math.uqam.ca/fabricelarribe/

[jeudi 3 janvier 2013]

## 1 Objectifs Généraux

Le cours MAT3071 vise à :

- ⊡ familiariser l'étudiant avec les processus stochastiques;
- ⊡ le rendre apte à modéliser un phénomène concret grâce à ceux-ci.

## 2 Description du répertoire de l'UQAM

Familiariser l'étudiant avec les principaux modèles mathématiques pertinents à l'étude des processus stochastiques. Processus stochastiques. Chaînes de Markov. Matrice de transition. Stationnarité. Promenades aléatoires. Processus de Poisson et de renouvellement. Processus de ramification: fonction génératrice et probabilité d'extinction. Théorème critique de la moyenne. Processus de Markov continus: mouvement brownien.

## 3 Thèmes

- ⊡ Chaînes de Markov (11.5 hrs)

  *Matrice de transition - équations de Chapman-Kolmogorov - temps d'entrée - récurrence - périodicité - classification des états - probabilité et temps moyen d'absorption - analyse des premiers pas - temps moyen dans les états transitoires - promenade aléatoire symmétrique et asymétrique - promenade entre barrières réfléchissantes ou absorbantes*

- ⊡ Comportement à long terme des chaînes de Markov (4.5 hrs)

  *Stationnarité - théorèmes limites - chaînes de Markov réductibles - ch*

- ⊡ Processus de ramification (2 hrs)

  *Définition - moyenne et variance du nombre de descendants - probabilités d'extinction*

- ⊡ Processus de Poisson (8 hrs)

  *Loi exponentielle - Minimum d'exponentielles - définitions du Processus de Poisson - temps d'attente - distribution des temps d'arrivés - généralisation des processus de Poisson: processus non homogène et processus composé - Processus de renouvellement*

- ⊡ Chaînes de Markov à temps continu (8 hrs)

*Probabilité de transition - générateur infinitésimal - équations de Chapman-Kolmogorov - probabilité limites - chaîne de naissance et de mort - explosion - chaîne sous-jacente - systèmes $M/M/n$*

⊡ Mouvement brownien (3 hrs)

*Processus de diffusion - dérive et variance - temps d'atteinte - interpolation et extrapolation - principe de réflexion - loi du maximum et zéros*

## 4 Objectifs Spécifiques

à la fin du cours, l'étudiant devra être en mesure :

*Chaînes de Markov, promenades aléatoires, processus de ramification*

1. de déterminer si un processus est une chaîne de Markov ;
2. d'écrire la matrice de transition d'une chaîne et d'utiliser celle-ci pour calculer la probabilité de certains événements ;
3. de calculer la loi d'un temps d'entrée ;
4. de classifier les états d'une chaîne ;
5. de calculer les probabilités d'absorption et les temps moyen d'absorption ;
6. d'identifier la mesure de probabilité stationnaire d'une chaîne si elle existe ;
7. d'appliquer les méthodes précédentes au cas des promenades aléatoires et des processus de ramification ;
8. de calculer la probabilité d'extinction d'un processus de ramification.

*Processus de Poisson, chaînes de Markov à temps continu*

1. modéliser et calculer la probabilité de certains évènements dans des modèles exponentiels ;
2. de calculer la probabilité de certains évènements d'un processus de Poisson, qu'il soit homogène ou non ;
3. déterminer si un processus donné est un processus de naissance et de mort ;
4. d'écrire et d'utiliser les équations de Kolmogorov ;
5. d'exploiter le conditionnement dans l'étude des processus ;
6. de décrire la chaîne discrète sous-jacente à une chaîne continue et d'étudier les relations existant entre celles-ci;
7. de classifier les états d'une chaîne de naissance et de mort ;
8. de calculer les probabilités limites d'une chaîne de Markov.

## 5 Horaires et salles:

⊡ Lundi, 9h00 à 10h30, salle SH-3420.
⊡ Jeudi, 9h00 à 10h30, salle SH-3420.
⊡ Jeudi, 10h30 à 12h30, salle SH-3420 [Séance d'exercice].

## 6 Évaluations: Deux examens de 40 % et deux tests de 10% (voir section 8).

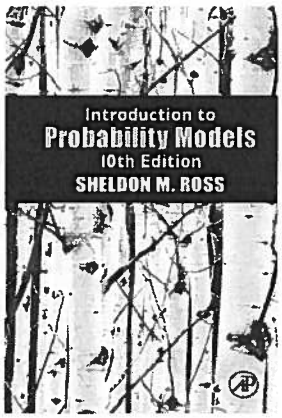
**7** Manuel et Notes de Cours:

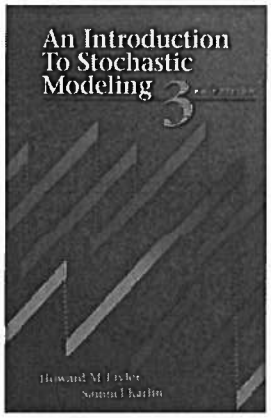
Des notes de cours sont disponibles par Moodle:

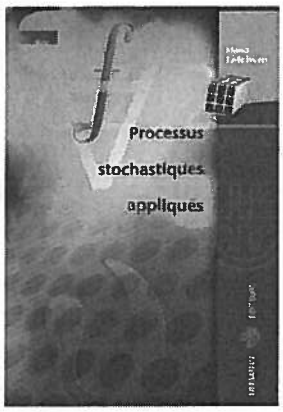
`http://www.moodle.uqam.ca/coursv2/`

vous pouvez les télécharger et les imprimer à votre convenance. Le cours est basé sur ces notes, et ces dernières sont à compléter pendant le cours. Ces notes sont construites à partir de deux manuels mentionnés ci-dessous, et de nombreuses références vers ces manuels sont présentes dans les notes. Il n'est pas nécessaire de se procurer un de ces manuels pour suivre le cours. Si vous désirez des compléments aux notes, vous pourrez cependant consulter ces manuels disponibles à la bibliothèque, ou les acheter à la librairie scientifique de la COOP UQAM.

- ⊡ S. Ross, Introduction to probability models ($10^{\text{ème}}$ édition, Academic Press, 2009. 978-0123756862, QA 273 R84 .2010)
- ⊡ H.M. Taylor et Samuel Karlin, An introduction to stochastic modeling ($3^{\text{ème}}$ édition, Academic Press, 1998. ISBN: 0-12-684887-4, QA274T39.1998)
- ⊡ Mario Lefebvre, Processus Stochastiques Appliqués (Presses Internationales Polytechniques, 2005. ISBN: 2-553-01155-5 ; 20059414448, QA274.L375.2005)



## 8 Calendrier

| | L | M | M | J | V | | | Sem. | Démo. | Cours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 3 | 2 | 5 | 6 |
| | 28 | 29 | 30 | 31 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 7 | 8 |
| Février | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 5 | 4 | 9 | 10 |
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 6 | 5 | 11 | 12 |
| | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 7 | 6 | 13 | 14 |
| | 25 | 26 | 27 | 28 | 1 | 2 | 3 | 8 | | | |
| Mars | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 9 | | 15 | 16 |
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 10 | 7 | 17 | 18 |
| | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 11 | 8 | 19 | 20 |
| | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 12 | 9 | 21 | 22 |
| Avril | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 13 | 10 | | 23 |
| | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 14 | 11 | 24 | 25 |
| | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 15 | 12 | 26 | 27 |
| | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 16 | | 28 | 29 |

**Dates importantes**: ■ Examen Intra: jeudi 7 mars, de 9h15 à 12h15, ■ Examen final: jeudi 25 avril, de 9h15 à 12h15, ■ Examens partiels (tests): lundi 4 février, lundi 8 avril, de 9h00 à 10h30.

## 9 Respect de l'intégrité académique

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de "tolérance zéro", la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.
Endossant cette philosophie de "tolérance zéro" relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante :

`http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php`

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

**Article 2: Infractions de nature académique**

2.1 Infraction Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement.

2.2 Liste non limitative des infractions Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer :

a. la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité;
b. le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
c. l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
d. la possession ou l'obtention par vol, manœvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen;
e. la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques;
f. l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne;
g. l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
h. l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation;
i. la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
j. la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

**Article 3 - Sanctions**

3.1 L'attribution de la mention"P". L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention "P" au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention "P" n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier. Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes.

3.2 La mise en probation et autres sanctions

a. la mise en probation; La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement. La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention "P" est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée. Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes :
b. l'échec au cours ou à l'activité créditée;
c. l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés;
d. la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs;
e. son expulsion définitive de l'Université.