UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Département de mathématiques

AUTOMNE 2016
L. Bélair

PLAN DE COURS

MAT 3005 groupe 20, THÉORIE DES ÉQUATIONS

Mardi 9h-10h30, SH-3140 ; mercredi 18h-19h30, PK-2265
Séance d'exercices mardi 10h30-12h30, SH-3140

.....

Professeur : LUC BÉLAIR
BUREAU : PK-5330, tél.: 987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca . (mercredi, 15h- 17h)
Site internet du cours : voir **http://www.moodle.uqam.ca**

Description du cours selon l'annuaire
Ce cours vise un approfondissement et un prolongement de concepts mathématiques essentiels dans les programmes de niveau secondaire. De plus, ce cours veut développer un autre rapport au savoir algébrique chez les étudiants. Problèmes classiques de constructions géométriques (duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle): impossibilité de les résoudre avec la règle et le compas, solutions utilisant des méthodes alternatives. Résolution d'équations polynomiales à l'aide de radicaux (dans les réels et dans les complexes): équations de degré inférieur à 5, relations entre les racines et les coefficients, polynômes irréductibles, extensions de corps et groupes associés, éléments de la théorie de Galois. Théorème fondamental de l'algèbre. Résolution numérique d'équations. Préalables : MAT2005 Algèbre linéaire et géométrie vectorielle.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?

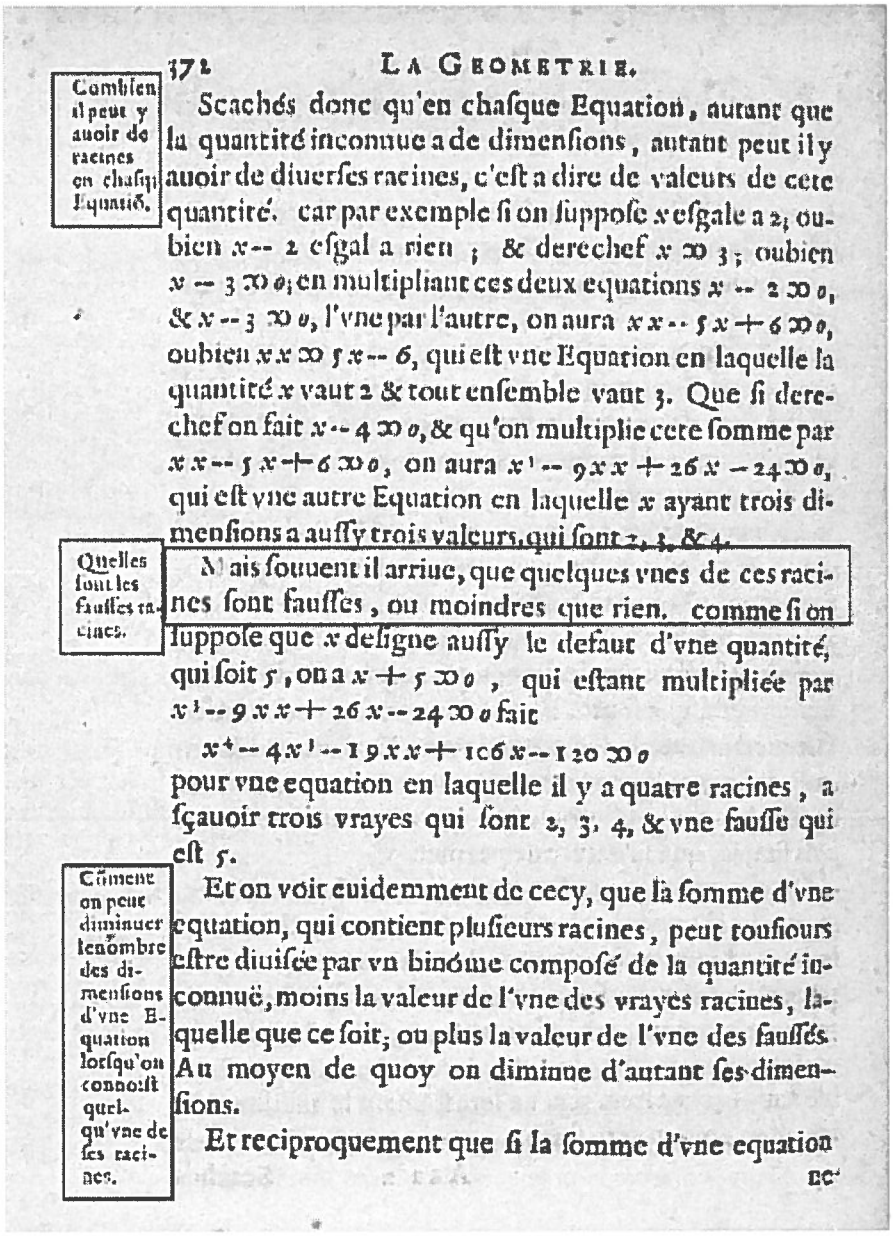
« J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par degrés ; que c'étoit vraisemblablement quelque besoin qui avoit fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puisque c'étoient des Commençans qui les avoient faits. » A. Clairaut (1713-1765), *Élémens de géométrie*, 1741.

Une *théorie* des équations algébriques existe depuis le Moyen Âge, puis se développe sous forme symbolique à partir de la Renaissance, jusqu'à l'apparition d'une *théorie des corps* au dix-neuvième siècle. Nous allons voir comment faire parler les équations et comment leurs racines nous font signe pour les trouver en suivant les tangentes. Nous allons dévisser les corps par degré pour faire apparaître les petits radicaux qui révèlent les racines, mais aussi cerner les impossibles duplicateurs de cubes, trisecteurs d'angles, quadrateurs de cercle et gros radicaux.

Le cours sera axé sur la résolution algébrique des trois problèmes classiques de construction géométrique et sur la résolution par radicaux des équations algébriques de petit degré.

Objectifs généraux Que vise ce cours?
Vous faire approfondir vos connaissances algébriques et votre rapport au savoir algébrique. Contribuer à la synthèse de vos connaissances mathématiques en mettant en évidence comment des résultats d'origines variées peuvent contribuer à résoudre un même problème. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement
– A chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion.
– Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle un auxiliaire d'enseignement, M. Herman Goulet-Ouellet, sera là pour répondre à vos questions et travailler avec vous les solutions d'exercices plus difficiles.



372 LA GEOMETRIE.

Combien il peut y auoir de racines en chaſq; Equatiõ.

Scachés donc qu'en chaſque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimenſions, autant peut il y auoir de diuerſes racines, c'eſt a dire de valeurs de cete quantité. car par exemple ſi on ſuppoſe x eſgale a 2, oubien $x-2$ eſgal a rien ; & derechef $x \propto 3$; oubien $x-3 \propto 0$; en multipliant ces deux equations $x-2 \propto 0$, & $x-3 \propto 0$, l'vne par l'autre, on aura $xx-5x+6 \propto 0$, oubien $xx \propto 5x-6$, qui eſt vne Equation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout enſemble vaut 3. Que ſi derechef on fait $x-4 \propto 0$, & qu'on multiplie cete ſomme par $xx-5x+6 \propto 0$, on aura $x^3-9xx+26x-24 \propto 0$, qui eſt vne autre Equation en laquelle x ayant trois dimenſions a auſſy trois valeurs, qui ſont 2, 3, & 4.

Quelles ſont les fauſſes racines.

Mais ſouuent il arriue, que quelques vnes de ces racines ſont fauſſes, ou moindres que rien. comme ſi on ſuppoſe que x deſigne auſſy le defaut d'vne quantité, qui ſoit 5, on a $x+5 \propto 0$, qui eſtant multipliée par $x^3-9xx+26x-24 \propto 0$ fait

$$x^4-4x^3-19xx+106x-120 \propto 0$$

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a ſçauoir trois vrayes qui ſont 2, 3, 4, & vne fauſſe qui eſt 5.

Cõment on peut diminuer le nõbre des dimenſions d'vne Equation lorſqu'on connoiſt quelqu'vne de ſes racines.

Et on voit euidemment de cecy, que la ſomme d'vne equation, qui contient pluſieurs racines, peut touſiours eſtre diuiſée par vn binõme compoſé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'vne des vrayes racines, laquelle que ce ſoit; ou plus la valeur de l'vne des fauſſes. Au moyen de quoy on diminue d'autant ſes dimenſions.

Et reciproquement que ſi la ſomme d'vne equation

nc

Extrait de *La Géométrie* de Descartes, 1637.

ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

« C'est dans la cuve gauche du fondoir du Pequod (...) que je fus frappé pour la première fois – indirectement – par le fait remarquable qu'en géométrie tous les corps glissant le long d'une cycloïde – ma pierre à polir par exemple – arrivent au bas de n'importe quel point en un temps identique. »
H. Melville (1819-1891), *Moby Dick*, 1851.

Semaine 1. (6-7 sept.) Introduction, les trois problèmes de l'Antiquité et la résolution par radicaux. Les constructions à la règle et au compas.

Semaine 2. (13-14 sept.) Les nombres constructibles à la règle et au compas. La notion de sous-corps des nombres réels et des nombres complexes.

Semaine 3. (20-21 sept.) Extensions de corps et caractérisation des nombres constructibles.

Semaine 4. (27-28 sept.) Impossibilité de la duplication du cube et de la trisection des angles à la règle et au compas.

Semaine 5. (4 -5 oct.) Nombres algébriques et impossibilité de la quadrature du cercle à la règle et au compas.

Semaine 6. (11-12 oct.) Degré des extensions de corps et retour sur la duplication du cube et la trisection des angles. Synthèse.

Semaine 7. (18-19 oct.) **EXAMEN I (18 octobre)**. Constructions géométriques alternatives.

Semaine 8. (25-26 oct.) La résolution des équations algébriques par radicaux.

Semaine 9. (1-2 nov.) Les polynômes nous parlent de leurs racines, les relations de Viète.

Semaine 10. (8-9 nov.) La résolution des équations cubiques par radicaux.

Semaine 11. (15-16 nov.) La résolution des équations quartiques par radicaux. La résolution numérique par la méthode des tangentes.

Semaine 12. (22-23 nov.) La permutation des racines et le groupe d'une équation.

Semaine 13. (29-30 nov.) Évaluation des enseignements (29 novembre, 9h20-9h50). Aperçu de l'impossibilité de la résolution générale des équations quintiques par radicaux.

Semaine 14. (6-7 déc.) Synthèse.

Semaine 15. (13-14 déc.) **Examen II (13 décembre)**

N.B. En vertu de la nouvelle politique d'évaluation des enseignements, il est prévu que l'évaluation se réalise par internet dans un moment de 20 à 30 minutes réservé à cette fin à l'intérieur d'un cours. Les étudiant_e_s peuvent accéder au site à l'aide d'un ordinateur portable ou d'une tablette (www.evaluation.uqam.ca). Ce moment sera le 29 novembre, 9h20-9h50.

Présence au cours

Les présences au cours ne sont pas comptabilisées. Cependant, le contenu des cours, bien que suivant parfois des références précises, se trouvera augmenté de commentaires et de quelques notions et exemples absents de ces références.
Si vous manquez un cours, assurez-vous de demander les notes de cours à l'un ou l'une de vos collègues de classe. Aucune information sur le contenu des cours manqués ne sera envoyée par le professeur.
Toute absence à un examen équivaut à un échec de cette évaluation, sauf en cas de force majeure[1]. Dans un tel cas, et sans exception, vous aurez à fournir une pièce justificative et à vous entendre avec le professeur pour le rattrapage de l'évaluation manquée.
Vous êtes invité-e-s à être particulièrement vigilant-e-s durant la seconde moitié de la session : c'est souvent à ce moment que l'on choisit de terminer les travaux qui s'accumulent plutôt que d'assister au cours. Il est conseillé de prévoir, dès le début de la session, le nombre et l'ampleur des travaux qui sont exigés dans l'ensemble de vos cours.

Circonstances particulières

Si vous avez des problèmes de santé, problèmes d'apprentissage, dyslexie, etc., veuillez en aviser le professeur le plus tôt possible. Plusieurs services uqamiens peuvent être mis à contribution afin de vous aider.

Le site internet du cours
La consultation du site internet du cours dans le système Moodle (http://moodle.uqam.ca) est obligatoire dans ce cours. Plusieurs documents, liens vers des sites internet, énoncés de travaux et consignes s'y trouveront qui ne figurent pas dans ce plan de cours, ni ne seront distribués en classe.

Courriel UQAM
Votre adresse de courriel normalisée de l'UQAM (...@courrier.uqam.ca) est la seule qui sera utilisée par le professeur pour communiquer avec vous. Vous avez la responsabilité de consulter ce courriel régulièrement. De même, tout message envoyé par vous au professeur au moyen d'une autre adresse de courriel (hotmail, gmail, yahoo, etc.) peut être bloquée par le serveur de l'UQAM.

Écrire au professeur
Dans toutes vos communications par courriel au professeur, n'oubliez pas de donner un titre clair à votre message (le professeur n'ouvre pas les messages portant des titres tels que « Salut ! » ou « En passant »), et d'y poser une question claire et précise (le professeur ne répond pas au message dont la question est « Je ne comprends pas l'exercice 2 !» , « Et si j'additionne deux, je risque de tomber sur le bon résultat ? » etc.).
Si vous écrivez au professeur, vous devriez recevoir une réponse dans un délai de 48 heures (deux jours) ouvrables ; cela exclut donc les jours fériés et les fins de semaines. En ce sens, il est préférable d'éviter les demandes urgentes ou de dernière minute et de prévoir à l'avance vos échéances de travaux.

À FAIRE
Les lectures ou activités préparatoires qui seront annoncées dans le site internet du cours.
Travailler les exercices par soi-même avant les séances d'exercices : c'est la seule façon de bien s'approprier la matière. Si vous ne le faites pas vous échouerez. Il n'est pas important que vous ne réussissiez pas à faire tous les exercices du premier coup, mais il est essentiel que vous essayiez sérieusement de les résoudre.

1 Cas de force majeure : maladie, décès ou hospitalisation d'un parent proche, accident, etc. Ne sont pas inclus dans les cas de force majeure : un réveil-matin dysfonctionnel, une panne de métro, un emploi, une panne d'imprimante la veille, etc.

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire. La note de passage du cours est fixée à 60%.

(A) DESCRIPTION SOMMAIRE

	Échéance	Pondération
- Devoirs	À déterminer (environ 8)	20 %
- Participation	À déterminer	10 %
- Examen mi-session	18 octobre (7e semaine)	35 %
- Examen final	13 décembre	35 %

(B) DESCRIPTION DÉTAILLÉE

Devoirs

Pour bien comprendre ce cours il est important d'en maîtriser les notions et techniques de base. Les devoirs visent principalement ce but. Chacun comprend une question sur la matière vue durant la semaine ou la semaine précédente. Les devoirs peuvent être faits en équipe de deux (2) maximum, les deux étudiant-e-s étant clairement identifié-e-s sur la copie. On insistera particulièrement sur le bon usage du langage mathématique (symboles compris).

Consignes

- Les devoirs doivent être faits sur des **feuilles de format lettre (21,7cm x 28cm) agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type** ;
- le **code permanent** de chaque étudiant-e doit apparaître sur la copie **en haut à droite**;
- **aucun travail de la qualité d'un brouillon ne sera accepté.**
- **les devoirs doivent être remis en classe à la date demandée.** Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans Internet. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans Internet. Le cas échéant, tout retard est pénalisé de 33% par jour.

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- exactitude des calculs ;
- jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique (symboles compris), qualité du français (0,5% par faute).

Participation. Les étudiants devront se regrouper en équipes de deux personnes. Chaque équipe devra présenter une fois durant la session à la séance d'exercices, un des exercices donnés pour la semaine en question. L'exercice à présenter sera choisi par le professeur. L'exposé est limité à trente minutes maximum. Chaque équipe pourra désigner l'un de ses membres pour faire la présentation. Chaque équipe devra remettre une solution écrite de l'exercice. La semaine assignée à chaque équipe sera tirée au hasard. L'évaluation sera faite par Succès/Échec, avec possibilité de reprise. On insistera particulièrement sur le bon usage du langage mathématique (symboles compris).

Les examens. Les examens sont de type traditionnel. **Aucun documentation, ordinateur, téléphone, etc. n'est permis**. Chaque étudiant_e doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences

(voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php , et la fin du plan de cours).

Examen mi-session. L'examen de mi-session porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. Durée: 3 heures .

Examen final. L'examen final porte sur toute la matière, mais surtout celle qui n'était pas couverte par l'examen de mi-session. Durée: 3 heures.

Critères d'évaluation des examens : exactitude du raisonnement, exactitude des calculs, jusqu'à 5% pourra être attribué au bon usage du langage mathématique (symboles compris), et à la qualité du français (0,5%/faute ; dictionnaire papier permis).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Des notes de cours sur certaines parties de la matière seront disponibles dans le site internet du cours. Pour les trois problèmes classiques de construction géométrique nous utiliserons comme référence de base les chapitres 1 et 2 du livre de Carrega, *Théorie des corps – La règle et le compas* (voir ci-dessous), qui seront disponibles dans le site internet du cours.

LECTURE RECOMMANDÉE

J.-C. Carrega, *Théorie des corps – La règle et le compas*, Hermann, 1989. (QA564C37) (*)

C.R. Hadlock, *Field Theory and its Classical Problems*, Mathematical Association of America, 1978. (QA247H24) (*)

PRÉALABLES (MAT2005)

P. Leroux, *Algèbre linéaire – Une approche matricielle*, Modulo, 1991 [1983]. (QA188L47)

NIVEAU PLUS APPROFONDI

S. Lang, *Structures algébriques*, Paris, Inter Editions, 1976. (QA 251 L 2514)
C. Mutafian, *E quations alge briques et the orie de Galois*, Librairie Vuibert, 1980 (QA247M88)

AUTRES

A. Bouvier, M. George et F. Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques,* Presses universitaires de France, 2005. (QA5B68.2005; section référence)
J.-P. Colette, *Histoire des mathématiques*, 2 tomes, Éd. Renouveau pédagogique, 1973 [1979]. (QA21C63)
A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Éd. Seuil, 1986. (QA21D35)
B. Hauchecorne et D. Suratteau, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, 1996. (QA28H28 ; section référence)
G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod, 1962. (QA11P614)
http://images.math.cnrs.fr/ : la recherche mathématique en mots et en images.

RENSEIGNEMENTS

Les livres et documents suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.
Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles dans les bibliothèques de l'UQAM (QA : bibliothèque des sciences, sauf exception).

COMPÉTENCES PROFESSIONNELLES DES ENSEIGNANTS

Le cours touche principalement la compétence 1. La compétence 11 est touchée mais non évaluée. L'utilisation d'un site internet propre au cours peut servir d'exemple pour le développement de la compétence 8. La compétence 2 est touchée, comme dans tous les cours.

Niveau de maîtrise attendu en regard des compétences professionnelles

Compétence *Niveau de maîtrise attendu*	Niveau de développement attendu	Sommaire des modalités d'évaluation
Compétence 1 Agir en tant que professionnelle ou professionnel héritier, critique et interprète d'objets de savoirs ou de culture dans l'exercice de ses fonctions.		
Situer les points de repère fondamentaux et les axes d'intelligibilité (concepts, postulats, méthodes) des savoirs de sa discipline afin de rendre possible des apprentissages significatifs et approfondis chez les élèves. *Comprendre les différents savoir à enseigner (disciplinaires et curriculaires) de telle sorte qu'il puisse favoriser la création de liens significatifs chez l'élève.*	Approfondissement	Examens (35%,35%) Travaux (10%,8x2,5%)
Compétence 2 Communiquer clairement et correctement dans la langue d'enseignement, à l'oral et à l'écrit, dans les contextes liés à la profession enseignante	divers	
Maîtriser les règles et les usages de la langue orale et écrite de manière à être compris par l'ensemble de la communauté francophone ou anglophone.	Consolidation	Politique départementale relative au français, et langage mathématique.
S'exprimer dans une langue correcte avec l'aisance, la précision, l'efficacité et l'exactitude qui conviennent à ce que la société attend d'une professionnelle ou d'un professionnel de l'enseignement.	Consolidation	Politique départementale relative au français, et langage mathématique.
Compétence 8 Intégrer les technologies de l'information et des communications aux fins de préparation et de pilotage d'activités d'enseignement-apprentissage, de gestion de l'enseignement et de développement professionnel.		
Disposer d'une vue d'ensemble des possibiités que les TIC offrent sur les plans pédagogique et didactique, notamment par l'intermédiaire d'internet, et de savoir les intégrer, de façon fonctionnelle, lorsqu'elles s'avèrent appropriées et pertinentes, dans la conception des activités d'enseignement-apprentissage.	Sensibilisation	Non évaluée.
Compétence 11 S'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel.		
Préciser ses forces et ses limites, ainsi que ses objectifs personnels et les moyens pour y arriver.	Sensibilisation	Non évaluée.

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.

Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique	**Article 3 - Sanctions**
2.1 Infraction Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement. *2.2 Liste non limitative des infractions* Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer : a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité; b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence; c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant; d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen; e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques; f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne; g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle; h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation; i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances; j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.	*3.1 L'attribution de la mention «P»* L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier. Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes. *3.2 La mise en probation et autres sanctions* a) la *mise en probation;* La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement. La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée. Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes : b) l'échec au cours ou à l'activité créditée; c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés; d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs; e) son expulsion définitive de l'Université.