UQÀM | Université du Québec
à Montréal

Mat 2410 : Calcul des formes différentielles

Professeur : Olivier Collin, Bureau PK-5340, Courriel: collin.olivier@uqam.ca

Horaire : Mardi 13h30–15h et Mercredi 9h–10h30 ; TP: Mercredi 10h30–12h30

Heures de disponibilité : Mardi 9h30–11h30 ou sur rendez-vous

Introduction

Le calcul différentiel et intégral dans l'espace a été abordé dans le cours *Calcul I* en mettant l'emphase sur les aspects purement calculatoires. Il est usuel de poursuivre dans cette voie lors d'un second cours (anciennement appelé *Calcul II* à l'UQAM) pour traiter d'intégrales de chemins et de surfaces ainsi que des principaux théorèmes intégraux de l'analyse vectorielle (Green, Stokes et Gauss-Ostrogradsky), en utilisant une gymnastique quelque peu archaïque, héritée il y a longtemps de la physique, et qui se fonde sur la notion ad hoc d'opérateur vectoriel.

Il se trouve que les mathématiciens et mathématiciennes ont à leur disposition depuis plus d'un siècle (il faut en effet remonter aux travaux d'Elie Cartan sur ce sujet débutant en 1899) la notion de *forme différentielle.* Pour des raisons obscures et probablement analogues à celles entourant le traitement de l'intégrale de Lebesgue, on attend souvent très tard dans le cheminement des étudiants en mathématiques avant d'introduire cette notion. Le but premier de ce cours est de présenter une version *à jour* des théorèmes intégraux classiques, après avoir passé quelque temps à développer une approche simple du concept de forme différentielle. Nous aurons ensuite la possibilité de comprendre certaines équations fondamentales de la physique mathématique, notamment les équations de Maxwell en électromagnétisme. Selon le temps disponible, nous conclurons le cours avec une introduction élémentaire au calcul des formes différentielles sur les variétés.

Prérequis et travail requis

Un premier cours de calcul différentiel dans l'espace ainsi qu'une certaine familiarité avec les bases de l'algèbre linéaire seront utiles. On admettra sans preuves certains résultats d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$.

Pour bien saisir les idées présentées, l'étudiant(e) doit s'attendre à travailler efficacement pendant *au moins 3 heures* par semaine à l'extérieur des heures de cours et travaux pratiques.

Case postale 8888, succursale centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3P8
CANADA
514 987-3000
uqam.ca

Plan de cours

Chapitre I : Notions de base et introduction aux formes extérieures
- Rappels de calcul différentiel, gradient, coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.
- Courbes et surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- Formes extérieures sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$, interprétations géométriques.

Chapitre II : Formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$
- Définitions de base, exemples de calculs, différentielle extérieure.
- Formes fermée et exactes, complexe de de Rham, Lemme de Poincaré.
- Opérateur de Hodge, dualité, opérateurs vectoriels (gradient, divergence, rotationnel).

Chapitre III : Applications induites sur les formes différentielles
- Notions d'algèbre multilinéaire, déterminants.
- Effet d'une application dérivable, notion de tiré en arrière, fonctorialité.
- Nouvelle interprétation de la formule de changement de variables en intégration.

Chapitre IV : Intégration des formes différentielles
- Intégration des 1-formes, indice de rotation.
- Intégration des formes sur les chaînes.
- Notions de cycle et de bord dans $\mathbb{R}^n$.
- Théorème général de Stokes dans $\mathbb{R}^n$.
- Interprétation classiques : formules de Green, Stokes, Gauss-Ostrogradsky.
- Applications à quelques équations de la Physique mathématique.

Selon le temps disponible à la fin nous couvrirons également certains aspects du chapitre suivant :

Chapitre V : Introduction aux formes différentielles sur les variétés
- Notion de variété différentielle dans $\mathbb{R}^n$, variété à bord.
- Deux approches pour les formes différentielles sur les variétés.
- Formes volumes, orientations.
- Intégration et Théorème de Stokes sur les variétés.

Liste de références bibliographiques:

Le cours sera articulé autour de deux références principales. Nous commencerons à un niveau élémentaire en utilisant certains chapitres du livre publié en 2011 par Birkhaüser *A geometric approach to differential forms* de David Bachman. Ce livre est disponible en ligne comme achat recommandé, mais une version antérieure gratuite existe également (voir la page web suivante : http://arxiv.org/pdf/math/0306194v1.pdf).

Nous ferons peu à peu la transition vers les notes détaillées *Manifolds and differential forms* de Reyer Sjamaar (Cornell University). Elles sont disponibles gratuitement à l'adresse suivante :

http://www.math.cornell.edu/~sjamaar/papers/manifold.pdf

Voici d'autres livres qui pourraient compléter cette introduction et qui seront placés en réserve à la Bibliothèque des Sciences pour consultation :

S. Weintraub, *Differential forms : a complement to calculus*, Academic Press (1997) (QA 381 W45)

M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley (1965) (QA 612 S65 1965)

H. Cartan, *Formes différentielles*, Hermann (1967) (QA 381 C3)

Evaluation proposée:

2 Devoirs comptant pour un total de 20%.

2 Examens Intra comptant pour un total de 40% (Max 25% Min 15%).

1 Examen Final cumulatif comptant pour 40%.