Université du Québec à Montréal **Automne 2010**
Département de mathématiques

PLAN DE COURS

MAT 2055 groupe 30, LOGIQUE ET ENSEMBLES

.....

Mercredi de 16h30 à 18h00 et vendredi de 13h30 à 15h, local SH-3580.
Séance d'exercices le vendredi de 15h à 17h, local SH-3580.
Professeur: LUC BÉLAIR.
BUREAU: PK-5330; tél.: 514-987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca

---

Description du cours selon l'annuaire
Maîtriser les notions de base de la logique mathématique et de l'arithmétique générale des ensembles. Symbolisation: propositions, fonctions propositionnelles, descriptions, fonctions descriptives, connecteurs logiques. Variables libres et liées. Terme libre pour une variable dans une formule. Notion d'inférence:directe ou indirecte. Calcul des inférences à l'aide des règles de déduction naturelle. Vérité et fausseté des propositions. Contre-exemples. Ensembles finis et infinis (dénombrables et indénombrables): exemples et théorèmes fondamentaux. Cardinalité. Enoncé du théorème de Cantor-Bernstein et exemples d'applications. Réunions et intersections générales d'ensembles: application aux sous-structures engendrées (e.g. sous-espaces vectoriels). Théories du premier ordre, exemples classiques. Langages algébriques.
Préalable : MAT 1006 Arithmétique et géométrie classique.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?

« O mathématiques sévères,... Il y avait du vague dans mon esprit, un je ne sais quoi épais comme de la fumée. Vous avez mis, à la place, une froideur excessive, une prudence consommée et une logique implacable. » Lautréamont (1846-1870), *Les chants de Maldoror*.

Science du raisonnement, la logique remonte au moins à l'Antiquité. C'est lorsqu'on a fait de ses objets d'études des objets mathématiques qu'a pu émerger une « logique mathématique ». Depuis, la logique mathématique s'est développée en une discipline mathématique autonome. Ces dernières années ses liens avec l'informatique sont devenus d'actualité. Le concept mathématique d'ensemble et le calcul qu'on peut en faire sont apparus dans le dernier tiers du 19e siècle. C'est alors que naît la notion de cardinalité et une véritable arithmétique de l'infini.
Le cours sera axé sur les notions de base de la logique mathématique et de l'arithmétique générale des ensembles (voir l'échéancier ci-dessous).

Objectifs généraux Que vise ce cours?
Vous faire maîtriser les notions de base de la logique mathématique et de l'arithmétique générale des ensembles.
Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.
Vous familiariser avec certains objets mathématiques de base.

Types d'activités d'enseignement
- À chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion. Vous serez appelé-e-s à lire les sections appropriées du manuel auparavant. Cette lecture fait partie du cours.
- Le cours aura un site internet dans le système Moodle **http://www.moodle.uqam.ca** . Il contiendra toute l'information reliée au cours (pages à lire, exercices, solutionnaires, etc.)
- Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle une auxiliaire d'enseignement, Victoria Haliburton, sera là pour répondre à vos questions, vérifier vos solutions aux exercices et exposer les solutions d'exercices plus difficiles.
- Chaque semaine, **le lundi de 10h à 12h vous est réservé pour consultation individuelle à mon bureau**. En cas de difficulté d'horaire, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

ÉCHÉANCIER

Semaine 1. (8-10 sept.) Introduction. Cardinalité, définitions et exemples.

Semaine 2. (15-17 sept.) Ensembles dénombrables, cardinalité du continu, les nombres irrationnels. Comparaison des cardinalités. **ÉNONCÉ DU DEVOIR 1**

Semaine 3. (22-24 sept.) Les nombres algébriques et les nombres transcendants. Le dénombrable et le continu.

Semaine 4. (29 sept. - 1er oct.) Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein. Intersections et réunions de famille d'ensembles. **REMISE DU DEVOIR 1, ÉNONCÉ DU DEVOIR 2**

Semaine 5. (6-8 oct.) Logique propositionnelle, mots sur un alphabet, formules de la logique propositionnelle, induction sur l'ensemble des formules, arbres. Théorème de lecture unique, arbre associé à une formule, hauteur d'une formule.

Semaine 6. (13-15 oct.) Sous-formules, distributions de valeurs de vérité, tables de vérité. Tableaux vs formules, formules équivalentes, formes normales. **REMISE DU DEVOIR 2**

Semaine 7. (20-22 oct.) Formes normales (suite). Structures, langages du premier ordre.

Semaine 8. (27–29 oct.) Réalisations d'un langage du premier ordre, termes. Termes (suite). **EXAMEN 1**

Semaine 9. (3 – 5 nov.) Théorème de lecture unique des termes. Variables libres, formules closes, interprétations des termes et des formules.

Semaine 10. (10-12 nov.) Interprétation des termes et des formules (suite). La géométrie plane, le plan euclidien vs le plan des points « algébriques ».

Semaine 11. (17-19 nov.). Traduction des formules géométriques en formules algébriques, réduction aux formules closes sans quantificateurs. **ÉNONCÉ DU DEVOIR 3**

Semaine 12. (24-26 nov.) Règles d'inférence, démonstrations formelles.

Semaine 13. (1er-3 déc.) Démonstrations formelles (suite), lemme de déduction. Géométrie plane et démonstrations formelles. **REMISE DU DEVOIR 3**

Semaine 14. (8-10 déc.) Algorithme de démonstration automatique pour la géométrie plane.

Semaine 15. (15-17 déc.) **EXAMEN 2**

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire.

(A) Description sommaire	Échéance	Pondération
- Devoir 1	29 septembre	1/3 x 20%
- Devoir 2	13 octobre	1/3 x 20%
- Devoir 3	1er décembre	1/3 x 20%
- Examen 1	29 octobre	35%
- Examen 2	17 décembre	45%

(B) Description détaillée

Les devoirs. Les devoirs peuvent être faits en **équipe de deux (maximum)**.

Devoir I. Ce travail portera sur les propiétés de base des fonctions.
Devoir II. Ce travail portera sur la cardinalité.
Devoir III. Ce travail portera sur le calcul propositionnel et le calcul des prédicats.

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- Exactitude des calculs ;
- Jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique, qualité du français (0,5% par faute).

Présentation matérielle des devoirs. Les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format 21,7cm x 28cm agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type.** Le code permanent de chaque étudiant-e doit apparaître sur la copie.

***Remise des devoirs*.** Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans Internet à la date de remise. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans Internet.

Les examens

Les examens sont de type traditionnel. Aucune documentation ni calculatrice n'est permise. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php).

Examen 1. L'examen 1 porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. Durée: 2 heures, durant la période d'exercices (le cours précédent sera écourté).

Examen 2. L'examen 2 porte sur toute la matière, mais surtout celle vue depuis l'examen 1. Durée: 3 heures.

Critères d'évaluation des examens.

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- Exactitude des calculs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

Logique et ensembles - MAT 2055, recueil de notes de cours par L. Bélair.

LECTURE RECOMMANDÉE

R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique, tome 1*, Masson, 1993. (QA9C67)(*)
(2e édition, Dunod, 2003, pas essentiellement différente de la 1re édition).

A. Tarski, *Introduction à la logique*, Gauthiers-Villars, 1969. (QA9T2814)

R. Blanché, *L'axiomatique*, Presses Universitaires de France, 1967. (BC71B58 ; aussi au laboratoire de didactique, PK-4950)

OUVRAGES GÉNÉRAUX

Aristote, *L'organon*, traduction et notes en 5 volumes par J. Tricot, Librairie philosophique J. Vrin, 1989. (B437A6T7)

P. Halmos, *Introduction à la théorie des ensembles*, Gauthiers-Villars,1970. (QA248H26)

W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Éditions George Gabay, 2003. [Gauthiers-Villars, 1928]. QA248S463.2006

G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, 1962. (QA11P614).

PLUS AVANCÉS

R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique, tome 2,* Masson, 1993. (QA9C67)

P. Novikov, *Introduction à la logique mathématique*, Dunod, 1964. (BC135N6514)

J. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison Wesley, 1967. (QA9S50)

RENSEIGNEMENTS

Le recueil *Logique et ensembles - MAT2055* sera disponible à la COOP-UQAM.
(local permanent PK-R205)

Les livres et documents suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.

Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles dans les bibliothèques de l'UQAM (QA : sciences ; B,BC : centrale) .

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.

Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique

2.1 Infraction

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement.

2.2 Liste non limitative des infractions

Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer :

a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité;
b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen;
e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques;
f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne;
g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation;
i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Article 3 - Sanctions

3.1 L'attribution de la mention «P»

L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier.

Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes.

3.2 La mise en probation et autres sanctions

a) la *mise en probation;*

La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement.

La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée.

Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes **:**

b) l'échec au cours ou à l'activité créditée;
c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés;
d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs;
e) son expulsion définitive de l'Université.