UQAM Département de mathématiques — Automne 2003
MAT2010-20 Analyse II
Pierre Bouchard — Plan de cours.

Professeur: Pierre Bouchard
PK-5315 987-3000 3210# Bouchard.Pierre@uqam.ca
Démonstrateur: Sylvain Marcucci
marcucci@math.uqam.ca

Horaire: Ma 9:00–10:30 SH-2140
Ve 9:00–10:30 SH-2140
Ve 10:30–12:30 SH-2140 (exercices)

Objectifs.

Approfondir l'étude de base de l'analyse. Étudier des espaces plus généraux que la droite réelle, non seulement le plan ou l'espace euclidien à 3 dimensions ou plus mais aussi des espaces dont les « points » sont des fonctions. Introduire les notions d'espace métrique et de topologie comme outils pour l'étude d'espaces euclidiens et d'espaces de fonctions. Étudier différents concepts d'intégrale. Reconnaître diverses propriétés des suites et séries de fonctions.

Modalités d'organisation.

Le cours consistera en des exposés et des exercices et problèmes résolus en classe. Il ne sera pas possible de donner durant le cours des démonstrations de tous les résultats utilisés. Je mettrai l'accent sur la compréhension et l'utilisation des concepts.

Il pourra y avoir quelques séances en laboratoire, notamment pour se familiariser avec le logiciel Maple. Je fournirai des exemples de programmes et de calculs en Maple. Les étudiants sont invités à expérimenter beaucoup. Des ordinateurs munis du logiciel Maple sont disponibles dans les salles du labo sectoriel des sciences au sous-sol du pavillon PK (carte UQAM exigée).

Les séances d'exercices sont très importantes de même que le fait d'être à jour dans la connaissance des concepts et résultats introduits.

Des feuilles d'exercices seront fournies régulièrement (environ une par semaine). Le texte du présent plan et des exercices sont également disponibles sur WebCT 3 à l'adresse

`http://webct3.uqam.ca`

il suffit de suivre les instructions pour s'inscrire au cours MAT2010 sur ce site. Si vous n'avez pas déjà un code d'usager et un mot de passe WebCT3, il est facile d'en obtenir un en suivant les instructions. Vous devez cependant connaitre votre code permanent et votre code permanent numérique.

Méthodes et critères d'évaluation acceptés.

Deux examens. Le premier aura lieu le 24 octobre de 9 h à 12 h et le second aura lieu le 16 décembre de 9 h à 10 h 30.
Deux travaux pratiques (devoirs).
Des récitations
On annonce au cours précédent la possibilité d'une récitation au cours suivant. Le jour prévu pour une possible récitation, on tire à pile ou face pour savoir si elle a lieu.
Si $d_1 \geq d_2 \geq d_3$ sont les trois notes sur 5 des devoirs et récitations placées dans l'ordre décroissant, alors la note globale sur 10 pour les devoirs et récitations est $d = d_1 + d_2$.
Si $E_1 \geq E_2$ sont les notes sur 100 des deux examens, placées dans l'ordre décroissant, alors la note globale sur 90 pour les examens est $E = E_1 * 0,5 + E_2 * 0,4$.
La note finale sur 100 est $F = \max(d + E, E * 10/9)$.
On insistera beaucoup sur la qualité des travaux pratiques: ils doivent être **clairs** et dans un français intelligible. Les auteurs des travaux pratiques pourront être invités à expliquer oralement leurs solutions.

Contenu.

1. **Espaces métriques et topologiques. Définition et exemples.**
   - **1.1** Exemples de suites de fonctions. Discussion de la convergence d'une suite de fonctions.
   - **1.2** Définition d'espace métrique et d'espace topologique. Exemples: $\mathbb{R}^n$, espaces de fonctions.
   - **1.3** Distinction entre propriétés purement topologique et propriétés métriques Convergence, convergence uniforme (d'une suite de fonctions), complétude, compacité, connexité, connexité par arcs, continuité, continuité uniforme.
   - **1.4** Espaces rares et espaces maigres (1^{re} catégorie de Baire). Théorème de Baire.
   - **1.4** Contractions. Théorème du point fixe pour les contractions.
   - **1.5** Espaces normés, espaces de Banach, espaces pré-hilbertiens, espaces de Hilbert.
2. **Intégration.**
   - **2.1** Rappel de l'intégrale de Riemann. Introduction de l'intégrale de Stieltjes et de l'intégrale de Lebesgue.
   - **2.2** Notions de mesures. Mesure de Jordan et carctérisation des fonctions intégrables au sens de Riemann. Mesure de Lebesgue. Mesure de Hausdorff et dimension de Hausdorff-Besicovitch (dimension fractale).
3. **Espaces de fonctions.**
   - **3.1** Suites et séries de fonctions. Divers types de convergences,
   - **3.2** Liens entre la dérivée de la limite d'une suite (resp. d'une série) de fonctions et la limite des dérivées de ces fonctions en fonction du type de convergence.
   - **3.3** Liens entre l'intégrale de la limite d'une suite (resp. d'une série) de fonctions et la limite des intégrales de ces fonctions en fonction du type de convergence.
   - **3.4** Approximations de fonctions. Théorème de Weierstrass (preuve probabiliste via les polynômes de Bernstein). Énoncé du théorème de Stone-Weierstrass. Polynômes de Fourier et séries de Fourier. Un exemple d'effet de Gibbs.
4. **Formes linéaires positives.**
   - **4.1** Énoncé du théorème de Riesz.
   - **4.2** Différentiation dans les espaces normés.

Bibliographie.

1. Bruckner, Andrew M., Bruckner Judith B. et Thomson, Brian S. *Real Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
   QA300.B74 1997 ISBN 0-13-458886-X
   Référence principale. Ce livre contient pratiquement tout ce dont on a besoin dans le cours (sauf bien sûr, la terminologie française). Il a l'avantage d'être encore facilement disponible.
2. Goldberg, Richard M. *Methods of Real Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1976.
   QA331.5G58.1976 ISBN 0-471-31065-4
   Excellent volume. Difficile à trouver. L'ancienne édition publiée chez Blaisdell est excellente aussi.
3. Dieudonné, Jean *Éléments d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
   QA300D4714 ISBN
   Il s'agit d'un traité d'analyse en neuf volumes. Le chapitre 3 du volume I donne de très beaux exercices et exemples sur les espaces métriques.
4. Dieudonné, Jean *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
   QA300D5 ISBN
5. Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Montréal, c1976,
   QA300R8.1976 ISBN 0-07-054235-X
   Un classique connu sous le nom de « baby Rudin ».
6. Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Montréal, 1987,
   QA300R82.1987 ISBN 0-07-054234-1
   Un classique connu sous le nom de « big Rudin ».
7. Jacques Labelle et Armel Mercier, *Introduction à l'analyse réelle*, Modulo, Montréal 1993.
   QA300L16 ISBN 2-89113-448-6