Université du Québec à Montréal
Département de mathématiques

Hiver 2002

PLAN DE COURS

MAT 2000 *groupe 20*, *Algèbre II*

.....

Mardi de 11h à 12h30 et jeudi de 13h30 à 15h, local SH-3560.
Séance d'exercices le mardi de 13h30 à 15h, local SH-3560.
Professeur : LUC BÉLAIR.
BUREAU : PK-5330 ; tél. 987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca

---

Description du cours selon l'annuaire

Étude approfondie des concepts fondamentaux de l'algèbre. Anneaux, idéaux, idéaux engendrés. Anneaux de matrices. Corps de fractions d'un anneau intègre. Anneaux de polynômes et de séries formelles à une ou plusieurs indéterminées. Inversibilité sous la substitution. Anneaux factoriels. Éléments premiers, irréductibles, associés. Factorialité de tout anneau principal. Équations et variétés algébriques. Polynômes homogènes. Courbes et surfaces (théorème de Gauss). Résultant, théorème de Sturm et théorème des zéros de Hilbert. Anneaux noethériens: théorème de Hilbert sur les anneaux de polynômes. Groupes. Groupes quotients. Théorèmes d'isomorphie. Produit direct. Groupe libre. Présentation. Groupes abéliens finis: décomposition en produit de groupes cycliques. Action : orbites, stabilisateurs; action par translation, par conjugaison; centralisateur; classes de conjugaison; équation de classe; automorphismes. Applications: combinatoire, théorèmes de Sylow. Corps. Corps premiers. Extensions algébriques simples. Corps finis. Aperçu de la théorie de Galois.
Préalable : MAT 1000 Algèbre I, Mat 1200 Algèbre linéaire I.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours ?

Entre autres: nous pencher sur les polynômes, les diviser euclidiennement, déterrer leurs racines et poursuivre leurs idéaux en prenant un homomorphisme chez Emmy (voir page suivante).

L'algèbre est une branche très ancienne des mathématiques et occupe une place centrale. À l'origine elle s'intéresse à la résolution des équations faisant intervenir les quatres opérations élémentaires (+,-,x,÷). Au vingtième siècle le point de vue axiomatique prédomine après s'être établi comme outil, et l'emphase est portée sur l'étude des structures algébriques. Ces dernières années le point de vue d'origine de résolution effective des équations redevient d'actualité.
Le cours sera axé sur les concepts fondamentaux de l'algèbre et les méthodes qui s'y rattachent.
(voir l'échéancier ci-dessous)

Objectifs généraux Que vise ce cours ?

Vous faire approfondir certains concepts, méthodes et résultats de base de l'algèbre.
Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.
Vous familiariser avec certains objets mathématiques de base.

Types d'activités d'enseignement

- À chaque séance il y aura un exposé théorique avec questions et discussion.
- Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle un auxiliaire d'enseignement, M. Baptiste Chantraine, sera là pour répondre à vos questions, vérifier vos solutions aux exercices et exposer les solutions d'exercices plus difficiles. Une liste d'exercices vous sera remis chaque semaine.
- Chaque semaine, le mardi de 15 h à 17 h vous est réservé pour consultation à mon bureau. En cas de difficulté d'horaire, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.



Emmy Noether, 1882 - 1935

"Emmy Noether fut l'une des plus influentes parmi les mathématiciens et mathématiciennes de ce siècle. Le développement de l'algèbre abstraite, qui est l'une des innovations les plus distinctives du vingtième siècle en mathématiques, lui est largement attribuable: par ses publications, par ses cours et ses conférences, par son influence personnelle sur ses contemporains. Ses contributions sont maintenant si profondément ancrées dans la culture mathématique qu'on ne les lui attribue nommément que très rarement. Il semble donc approprié dans cette introduction à ses oeuvres complètes de tenter de mettre en évidence ses principales contributions à cette discipline mathématique connue sous le nom d'algèbre "abstraite", "conceptuelle" ou "moderne".
On peut dire que l'algèbre abstraite date de la parution de deux articles de Noether: un premier en collaboration avec Schmedleir "Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrucken" (1920, no 17 dans ce volume), ainsi que "Idealtheorie in Ringbereichen" (1921, no 19). Le premier porte sur un sujet plutôt spécialisé et son influence fut négligeable. Ce n'est qu'après coup qu'on se rend compte qu'il contient un nombre important d'idées dont la redécouverte par d'autres eut un impact significatif sur le développement du sujet.Nous reportons donc la discussion de cet article à plus tard et nous débuterons par le travail monumental de "Idealtheorie in Ringbereichen". Celui-ci appartient à un des courants centraux de l'algèbre abstraite, l'algèbre commutative, et peut être considéré comme le premier article du sujet comme distinct de son prédécesseur la théorie des idéaux de polynômes à plusieurs variables sur les nombres complexes. Dans cet article Noether introduit la classe d'anneaux maintenant appelées "noethériens" et dans lesquels tout idéal est de type fini, ou de façon équivalente dans lesquels toute chaîne ascendante d'idéaux s'arrête. Noether débute son article par les axiomes d'anneau commutatif. Plus loin elle définit aussi les anneaux non commutatifs. Apparemment, c'est la première fois que ces concepts sont formulés dans le sens où on les entend aujourd'hui (Une définition précédente de A.Fraenkel en 1914 était obscurcie d'hypothèses ad hoc très artificielles).(...)"

Nathan Jacobson dans l'introduction à Emmy Noether, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, éd. par N.Jacobson, Springer-Verlag, 1983.

(Traduction libre).

Idealtheorie in Ringbereichen.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

§ 1. Ringbereich, Ideal, Endlichkeitsbedingung.

§ 2. Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Idealen.

§ 3. Anzahlgleichheit der Komponenten bei zwei verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Ideale.

§ 4. Primäre Ideale. Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale bei zwei verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Ideale.

§ 5. Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen. Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale.

§ 6. Eindeutige Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von relativprim-irreduziblen Idealen.

§ 7. Eindeutigkeit der isolierten Ideale.

§ 8. Eindeutige Darstellung eines Ideals als Produkt von teilerfremd-irreduziblen Idealen.

§ 9. Ausdehnung der Untersuchung auf Moduln. Anzahlgleichheit der Komponenten bei Zerlegungen in irreduzible Moduln.

§ 10. Spezialfall des Polynombereiches.

§ 11. Beispiele aus der Zahlentheorie und der Theorie der Differentialausdrücke.

§ 12. Beispiel aus der Elementarteilertheorie.

sprechende Ideal die vier Zerlegungen zusammenfallen. Wegen dieses Zusammenfallens bedeutet auch seine Endlichkeitsbedingung, daß das Ideal nur endlich viele echte Teiler besitzen soll — von der übrigens teilweise abgesehen wird —, keine stärkere Einschränkung als unsere. Der Ausgangspunkt Fraenkels ist durch die andersartigen, im wesentlichen algebraischen Ziele seiner Arbeiten bedingt; durch algebraische Erweiterung gelangt er dann zu allgemeineren Ringen mit weniger einschränkenden Bedingungen.

§ 1.

Ringbereich, Ideal, Endlichkeitsbedingung.

1. Der zugrunde gelegte Bereich Σ sei ein (kommutativer) *Ring* in abstrakter Definition[2]); d. h. Σ bestehe aus einem System von Elementen $a, b, c, \ldots, f, g, h, \ldots$, in dem eine den üblichen Bedingungen genügende Relation als *Gleichheit* definiert ist; und in dem durch zwei Operationen (Verknüpfungsarten), *Addition* und *Multiplikation*, aus je zwei Ringelementen a und b stets eindeutig je ein drittes als Summe $a+b$ und als Produkt $a \cdot b$ gewonnen wird. Der Ring und die sonst ganz willkürlichen Operationen müssen dabei den folgenden Gesetzen genügen:

1. *Dem assoziativen Gesetz der Addition*: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
2. *Dem kommutativen Gesetz der Addition*: $a+b=b+a$.
3. *Dem assoziativen Gesetz der Multiplikation*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
4. *Dem kommutativen Gesetz der Multiplikation*: $a \cdot b = b \cdot a$.
5. *Dem distributiven Gesetz*: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
6. *Dem Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion.*

Es gibt in Σ ein einziges Element x, das die Gleichung $a+x=b$ befriedigt. (Man bezeichnet $x=b-a$.)

2. Unter einem *Ideal* $\mathfrak{M}$[4]) in Σ werde ein System von Elementen aus Σ verstanden, das den beiden Bedingungen genügt:

1. $\mathfrak{M}$ *enthält neben* f *auch* $a \cdot f$, *wo* a *ein beliebiges Element aus* Σ *ist.*

2. $\mathfrak{M}$ *enthält neben* f *und* g *auch die Differenz* $f-g$; also neben f auch nf für jede ganze Zahl n.

Ist f Element von $\mathfrak{M}$, so drücken wir das wie üblich durch $f \equiv 0 (\mathfrak{M})$ aus; und sagen, f *ist durch* $\mathfrak{M}$ *teilbar*. Ist jedes Element von $\mathfrak{N}$ zugleich Element von $\mathfrak{M}$, also teilbar durch $\mathfrak{M}$, so sagen wir: $\mathfrak{N}$ *ist durch* $\mathfrak{M}$ *teilbar*; in Zeichen: $\mathfrak{N} \equiv 0 (\mathfrak{M})$. $\mathfrak{M}$ heißt *echter Teiler* von $\mathfrak{N}$, wenn es von $\mathfrak{N}$ verschiedene Elemente enthält, also nicht umgekehrt durch $\mathfrak{N}$ teilbar ist. Aus $\mathfrak{N} \equiv 0 (\mathfrak{M})$; $\mathfrak{M} \equiv 0 (\mathfrak{N})$ folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Auch die übrigen bekannten Begriffe bleiben wörtlich erhalten. Unter dem *größten gemeinsamen Teiler* zweier Ideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — verstehen wir die Gesamtheit der Elemente, die sich in der Form $a+b$ darstellen lassen, wo a alle Elemente aus $\mathfrak{A}$, b alle aus $\mathfrak{B}$ durchläuft; $\mathfrak{D}$ wird wieder ein Ideal. Ebenso ist der größte gemeinsame Teiler von unendlich vielen Idealen — $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\nu, \ldots)$ — definiert als Gesamtheit der Elemente d, die sich darstellen lassen als Summe der Elemente von jeweils endlich vielen Idealen: $d = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_n}$; auch hier wird $\mathfrak{D}$ wieder ein Ideal.

ÉCHÉANCIER

Semaine 1. (8-10 janvier) Introduction, entiers de Gauss, anneaux et groupes de matrices, anneaux de polynômes, anneaux et groupes fonctions.

Semaine 2. (15-17 janvier) Divisibilité dans les anneaux intègres, corps de fractions, éléments irréductibles, premiers, associés, anneaux factoriels. Anneaux euclidiens.

Semaine 3. (22-24 janvier) Anneaux principaux, factorialité des anneaux principaux, théorème de Fermat sur les sommes de deux carrés.

Semaine 4. (29-31 janvier) Lemme de Gauss et factorialité des anneaux de polynômes sur un anneau factoriel.

Semaine 5. (5-7 février) Extensions de corps, degré d'une extension. Constructions à la règle et au compas, la duplication du cube.

Semaine 6. (12-14 février) Théorème de correspondance dans les groupes quotients et les anneaux quotients.

Semaine 7. (19-21 février) **SEMAINE DE RELÂCHE DU SECTEUR DES SCIENCES**

Semaine 8. (25-28 février) Idéaux, sous-anneaux, sous-groupes et ensembles de générateurs. **EXAMEN 1** (28 février)

Semaine 9. (5-7 mars) Produit direct interne de groupes, produit direct de groupes.

Semaine 10. (12-14 mars) Structure des groupes abéliens finis.

Semaine 11. (19-21 mars) Structure des groupes abéliens finis (suite).

Semaine 12. (26-28 mars) Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur, orbite, action par conjugaison.

Semaine 13. (2-4 avril) Groupes des solides platoniciens. Théorèmes de Sylow.

Semaine 14. (9-11 avril) Les corps finis.

Semaine 15. (16-18 avril) Corps finis et codes correcteurs.

Semaine 16. (23-25 avril) Synthèse. **EXAMEN 2** (23 avril)

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire.

(A) Description sommaire	Échéance	Pondération
- Devoirs hebdomadaires	chaque semaine	20%
- Examen de mi-session	mi-session	35%
- Examen final	fin de session	45%

(B) Description détaillée

Les devoirs

Chaque devoir porte sur la matière vue en cours de semaine. Il vise à faire intégrer les concepts et calculs de base.

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution;
- Exactitude des calculs;
- Jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique, qualité du français (0,5% par faute).

Présentation matérielle des devoirs. Les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format 21,7cm x 28cm agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type.**

Remise des devoirs. Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé à la réserve de la bibliothèque des sciences à la date de remise. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire à la bibliothèque.

Les examens

Les examens sont de type traditionnel. Aucune documentation n'est permise. Le cas échéant, tout examen différé a lieu à la fin de la session.

Examen de mi-session. L'examen de mi-session porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. Durée: 2 heures.

Examen final. L'examen final porte sur toute la matière, mais surtout celle vue depuis l'examen de mi-session. Durée: 3 heures, il aura lieu la dernière journée de cours.

Critère d'évaluation des examens.

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution;
- Exactitude des calculs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

LECTURE RECOMMANDÉE

A.I. Kostrikin, *Introduction à l'algèbre,* Moscou, M.I.R., 1986 (QA 154.2 K 6714) (*).

J. Calais, *Éléments de théorie des groupes,* Paris, Presses Universitaires de France, 1984. (QA174.2C25) (*).

J.B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra,* Addison-Wesley, 1994 (QA162F72) (*).

D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Paris, Ellipse, 1996 (QA154.2P47)(*)

OUVRAGES GÉNÉRAUX

G. Birkhoff et S. MacLane, *Algèbre*, Paris, Gauthier-Villars, 1971. (QA 266 M 2541).

R. Godement, *Cours d'algèbre,* Paris, Hermann, 1966. (QA 155 G 59.1963).

N. Jacobson, *Basic Algebra I,* New-York, W.H. Freeman, 1985. (QA 154.2 J 33.1985) (*).

N. Jacobson (éd.), *Emmy Noether, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers,* New-York, Springer-Verlag, 1983. (QA 3 N 64).

J. Labelle et C. Reutenauer, *Mat 1000 Algèbre I,* Dép. de mathématiques UQAM, 1999.

S. Lang, *Structures algébriques,* Paris, Inter Editions, 1976. (QA 251 L 2514).

LIVRES D'EXERCICES RÉSOLUS

H. Sureau et Y. Sureau, *Algèbre: DEUG scientifiques, 1ère et 2e années,* Paris, A. Colin, 1987. (QA 157S87) (*).

RENSEIGNEMENTS

Les livres suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon Président-Kennedy, niveau RC) et peuvent être consultés sur place.

Les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles à la Bibliothèque des sciences