UQAM Département de mathématiques — Hiver 2001
MAT2000-20 Algèbre II
Pierre Bouchard — Plan de cours

Professeur: Pierre Bouchard
PK-5315 987-3000 poste 3210# Bouchard.Pierre@uqam.ca
Démonstrateur: Pierre Bouchard (pour le moment)
PK-5315 987-3000 poste3210# bouchard@math.uqam.ca

Horaire: Ma 11:30–13:00 PK-2605
Ma 13:00–15:00 PK-2605(exercices)
Me 13:30–15:00 PK-2605

Objectifs.

Étude approfondie des concepts fondamentaux de l'algèbre, notamment en ce qui a trait aux structures d'anneau et de groupe. Perfectionnement de l'habilité à faire des preuves.

Déroulement du cours.

Le cours consistera en des exposés et des exercices et problèmes résolus en classe.

Il pourra y avoir quelques séances en laboratoire, notamment pour se familiariser avec le logiciel Maple. On fournira des exemples de programmes et de calculs en Maple.

On distribura régulièrement des feuilles d'exercices seront fournies régulièrement (environ une par semaine).

Modes et critères d'évaluation proposés.

L'évaluation se fera d'abord et avant tout par des examens (2 ou 3). Ceux-ci comporteront au moins 75% de problèmes du type de ceux fournis en exercices et travaux pratiques.

Il y aura aussi des devoirs à remettre durant la session (2 ou 3). On insistera beaucoup sur la qualité de ces derniers.

Un travail de session pourra remplacer un examen, si son sujet et son ampleur font l'objet d'une entente préalable avec le professeur et si ce travail est remis avant la date de l'examen. Un tel travail pourra faire l'objet d'un exposé en classe.

Contenu.

1. Rappels d'algèbre (ensembles, fonctions, opérations, relations d'équivalence, partitions).
2. Actions: orbites, stabilisateurs, action par translation, par conjugaison; centralisateur; classes de conjugaison; équation de classe; automorphismes.
3. Applications des actions de groupes: combinatoire, théorèmes de Sylow.
4. Groupes. Sous-groupes. Sous-groupes distingués.
5. Groupes quotients.
6. Théorèmes d'isomorphie pour les groupes.
7. Produit direct de groupes, produit semi-direct de groupes, produit en couronne de groupes de permutations. (Projet de travail: application au cube de Rubik.)
8. Groupes libres. Présentation d'un groupe à l'aide de générateurs et de relations.
9. Groupe abéliens finis: décomposition d'un groupe fini en produit de groupes cycliques. (Projets de travail: 1. généralisation à la décomposition d'un module de type fini en produit de modules monogènes; application à la décomposition cyclique d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k muni d'un endomorphisme u vu comme module de type fini sur l'anneau (euclidien, donc principal) des polynômes à une indéterminée à cofficients dans le corps k; 2. nombres de Betti et coefficients de torsion associés à l'homologie des complexes simpliciaux.)

10. Anneaux, idéaux, idéaux engendrés. Anneaux intègres. Anneaux principaux.
11. Anneaux de matrices.
12. Corps des fractions d'un anneau intègre.
13. Anneaux de polynômes et de séries formelles à une ou plusieurs indéterminées.
14. Conditions d'inversibilité sous la substitution pour les séries formelles.
15. Éléments premiers, éléments irréductibles, éléments associés.
16. Anneaux factoriels.
17. Factorialité de tout anneau principal. Pricipalité de tout anneau euclidien.
18. Équations et variétés algébriques affines.
19. Polynômes homogènes. Équations et variétés algébriques projectives.
20. Anneaux noethériens: théorème de Hilbert affirmant la noetherianité des anneaux de polynômes à un nombre fini d'indéterminées à coefficients dans un anneau noethérien.
21. Théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz).
22. Résultant.
23. Théorème de Sturm.

24. Corps. Corps premiers. Corps commutatifs.
25. Extensions algébriques simples.
26. Corps finis. (Projets de travail: 1. diverses démonstrations que tout corps fini est commutatif; 2. application des corps finis aux codes correcteurs d'erreur).
27. Aperçu de la théorie de Galois.

Bibliographie.

[1] M. F. Atiyah et I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., Don Mills, Ont., 1969.

[2] Garrett Birkhoff et Saunders Mac Lane, *A survey of modern algebra*, Macmillan, New York, 1965.

[3] Nicolas Bourbaki, *Algèbre, chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.

[4] David S. Dummit et Richard M. Foote, *Abstract albebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.

[5] Frederick M. Goodman, *Algebra Abstract and Concrete*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1998.

[6] I.N. Herstein, *Topics in algebra*, Xerox College Publishing, Toronto, 1964.

[7] Richard E. Johnson, *University algebra*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.

[8] Ernst Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[9] Sauders MacLane et Garrett Birkhoff, *Algèbre, vol. i et ii*, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[10] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Allyn and Bacon Inc., Boston, Toronto, 1984.

[11] Bartel Leendert van der Waerden, *Algebra*, Springer, New York, 1991.