Université du Québec à Montréal
Département de mathématiques

Automne 2014

PLAN DE COURS

MAT 1600 groupe 20, Calcul matriciel

Mardi 9h30-12h30, local PK-1705
Séance d'exercices, mercredi 13h30-15h30, local PK-1705

Professeur : LUC BÉLAIR
BUREAU : PK-5330, tél.: 987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca ; (lundi, 15h- 17h).
Page internet du cours : **http://www.moodle.uqam.ca**
Auxiliaire d'enseignement : Eduardo Blazek.

Description du cours selon l'annuaire

Opérations algébriques sur les matrices; applications, par exemple aux graphes orientés, aux chaînes de Markov et à l'analyse intersectorielle en économie. Algorithmes pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, pour l'inversion de matrices et le calcul de déterminants. Concepts de géométrie vectorielle et d'algèbre linéaire: longueur, volume, produit scalaire, orthogonalité, bases, dimension. Méthode des moindres carrés pour la régression simple, polynomiale, multiple. Applications diverses (formes quadratiques, diagonalisation, graphismes sur ordinateur, etc.).

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?

« Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. » Clairaut (1713-1765), *Élémens de géométrie*, 1741.
« C'est dans la cuve gauche du fondoir du Péquod (...) que je fus frappé pour la première fois – indirectement – par le fait remarquable qu'en géométrie tous les corps glissant le long d'une cycloïde – ma pierre à polir par exemple – arrivent au bas de n'importe quel point en un temps identique. » Melville (1819-1891), *Moby Dick*, 1851.

Relativement jeunes (voir page suivante) les matrices font aujourd'hui partie des outils mathématiques de base. Elles tiennent cette place à la fois par les applications à des domaines variés que par les multiples liens qu'elles entretiennent avec le reste des mathématiques. On considère qu'elles font partie de *l'algèbre linéaire*.
Le cours sera axé sur la maîtrise des techniques de base et des concepts fondamentaux, par des exemples étudiés en détails. (*voir l'échéancier ci-dessous*)

Objectifs généraux Que vise ce cours?

Vous faire maîtriser les techniques et notions de base de l'algèbre matricielle. Vous faire percevoir l'importance des concepts abstraits. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement

– À chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion.
– Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle un auxiliaire d'enseignement, M. Eduardo Blazek, sera là pour répondre à vos questions et exposer les solutions d'exercices plus difficiles.
– Chaque semaine, le lundi de 15h à 17h vous est réservé pour consultation individuelle à mon bureau. En cas de difficulté, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* *By* Arthur Cayley, *Esq.*, *F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \\ a''\ ,\ b''\ ,\ c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= ax + by + cz, \\ \mathrm{Y} &= a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{Z} &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \\ a''\ ,\ b''\ ,\ c'' \end{pmatrix} (x, y, z).$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, &c.: the law of the addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities: as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible; it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrive at the notion of a rational and integral function, or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. the determi-

TABLE DES MATIÈRES

I. *Algèbre des matrices*. Opérations de base et produit scalaire, partition de matrice, combinaison linéaire.

II. *Vecteurs, droites et plans*. Vecteurs dans l'espace, norme et produit scalaire, orthogonalité, projection orthogonale, produit vectoriel, droites et plans.

III. *Systèmes d'équations linéaires*. Élimination de Gauss-Jordan et forme paramétrique des solutions, opérations élémentaires de ligne, matrices élémentaires, forme l-réduite échelonnée, ensemble solution. Applications à l'inversion des matrices et l'intersection des droites et plans.

IV. *Déterminants*. Propriétés des déterminants, interpétation géométrique, développement de Laplace, règle de Cramer.

V. *Espaces vectoriels associés à une matrice*. Vecteurs ligne, vecteurs colonnes, sous-espace, espace ligne, espace colonne, noyau, indépendance linéaire, base, dimension. Approximation par moindres carrés.

VI. *Transformations linéaires*. Propriétés de base, représentation matricielle standard, composition, image, noyau, transformation inverse, polynôme caractéristique, valeurs propres et vecteurs propres.

ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

Semaine 1. (2 sept.) Matrices, addition, multiplication par un scalaire, produit scalaire, formulation du produit matriciel à l'aide du produit scalaire, combinaison linéaire, matrices particulières, inverse d'une matrice, matrice inversible.

Semaine 2. (9 sept.) Applications des matrices en théorie des graphes (chemins et connexité).

Semaine 3. (16 sept.) Systèmes d'équations linéaires, forme matricielle, élimination de Gauss-Jordan et forme paramétriques des solutions, opérations élémentaires de ligne, équivalence de ligne, matrices élémentaires, forme l-réduite échelonnée, rang, espaces associés à une matrice (espace ligne, espace colonne, noyau). Application des systèmes linéaires pour l'inversion des matrices, etc.

Semaine 4. (23 sept.) Vecteurs dans l'espace, droites dans l'espace, norme et produit scalaire, angle entre deux vecteurs. Plans et droites dans l'espace, distance.

Semaine 5. (30 sept.) Transformations linéaires, propriétés de base. Représentation matricielle standard des transformations linéaires, projection, réflexion, dilatation, contraction, rotation, etc.

Semaine 6. (7 oct.) Composition de transformations linéaires, image, noyau, transformation inverse. Synthèse.

Semaine 7. (14 oct.). Exemples. Déterminant d'une matrice carrée, propriétés fondamentales. **EXAMEN I** (15 oct)

Semaine 8. (21 oct.) Déterminant (suite) : développement de Laplace, règle de Cramer, applications géométriques.

Semaine 9. (28 oct.) Déterminant (suite) : application en cryptographie.

Semaine 10. (4 nov.) Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice, diagonalisation.

Semaine 11. (11 nov) Espaces associés à une matrice et sous-espaces. Approximation par moindres carrés.

Semaine 12. (18 nov.) Ensemble de générateurs, sous-espace engendré, indépendance linéaire, ensemble minimal de générateurs, base et dimension.

Semaine 13. (25 nov.) Bases ordonnées, matrice de passage, changements de base.

Semaine 14. (2 déc.) Exemples.

Semaine 15. (9 déc.) Sujet à déterminer selon le temps disponible et l'intérêt des étudiants. Synthèse.

Semaine 16. (16 déc.) **EXAMEN II**

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire. La note de passage de ce cours est fixée à 60 %.

(A) DESCRIPTION SOMMAIRE	Échéance	Pondération
- Devoirs	Hebdomadaire (environ 10)	20 %
- Examen I	15 octobre (7e semaine)	35 %
- Examen II	16 décembre	45 %

(B) DESCRIPTION DÉTAILLÉE

Devoirs hebdomadaires

Pour bien comprendre ce cours il est important d'en maîtriser les techniques. Les devoirs hebdomadaires visent principalement ce but. Chacun comprend une question sur la matière vue durant la semaine. **Les devoirs doivent être fait en équipe de deux ou trois.**

Consignes

- les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format lettre, brochées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type.** Vous pouvez rédiger ces devoirs en utilisant un logiciel de traitement de texte (LaTex, etc.), mais ce n'est pas obligatoire ;
- **aucun devoir de la qualité d'un brouillon ne sera accepté** ;
- le **code permanent** de chaque étudiant-es doit apparaître sur la copie **en haut à droite** ;
- **les devoirs doivent être remis au début de la séance d'exercices à l'auxiliaire d'enseignement.** Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans Internet à la date de remise. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans Internet.
- les consignes propres à chaque devoir.

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution ;
- exactitude des calculs ;
- jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique (symboles compris), qualité du français (0,5%/faute).

Les examens

Les examens sont de type traditionnel. **Aucune documentation, calculatrice, ordinateur, téléphone, etc. n'est permis**. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php , et la fin du plan de cours).

Examen I. Il porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. Durée: 2 heures **(pendant la séance d'exercices)**.

Examen II. Il porte sur la matière vue depuis le début, jusqu'à une semaine avant l'examen, mais surtout celle vue depuis l'examen I. Durée: 3 heures.

Critères d'évaluation des examens: exactitude du raisonnement amenant à la solution, exactitude des calculs, bon usage du langage mathématique (symboles compris).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

Des notes de cours seront disponibles dans le site internet du cours.

AUTRES

P. Leroux. *Algèbre linéaire. Une approche matricielle.* Modulo Éditeur, 1991 [1983]. (QA188L47) *

S. Lipschutz, M. L. Lipson, *Algèbre linéaire*, Ediscience International / Dunod, (Collection Schaum), 2003. (QA251L5414)

G. Strang. *Introduction to linear Algebra* (4e édition). Wellesley-Cambridge Press, 2009. (QA184.2S78 2009)*

G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications* (3e édition). Harcourt Brace Jovanovich Ed.. 1988. (QA184S76 1988)

G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod, 1962. (QA11P614)

A. Cayley, A memoir on the theory of matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 148, 1858, pp. 17-37.

http://xmaths.free.fr: vous y trouverez des notes de cours et des exercices en accès libre.

RENSEIGNEMENTS

Les livres et documents suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.

Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles dans les bibliothèques de l'UQAM (QA : sciences) .

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.
Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php
Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique

2.1 Infraction

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement.

2.2 Liste non limitative des infractions

Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer :

a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité;
b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen;
e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques;
f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne;
g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation;
i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Article 3 - Sanctions

3.1 L'attribution de la mention «P»

L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier.
Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes.

3.2 La mise en probation et autres sanctions

a) la *mise en probation;*
La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement.
La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée.
Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes :
b) l'échec au cours ou à l'activité créditée;
c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés;
d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs;
e) son expulsion définitive de l'Université.