Université du Québec à Montréal ***Automne 2014***
Département de mathématiques

PLAN DE COURS

MAT 1250 groupe 10, Algèbre linéaire I

Lundi, mercredi 13h30-15h, local SH-2420
Séance d'exercices, mercredi 15h-17h, local SH-2420/SH-2140

.....

Professeur : LUC BÉLAIR
BUREAU : PK-5330, tél.: 987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca ; (lundi, 15h- 17h).
Page internet du cours : voir **http://www.moodle.uqam.ca**
Auxiliaires d'enseignement : Maxime Gélinas, Mathieu Gaudreau ; disponibilité : à déterminer.

Description du cours selon l'annuaire Objectifs : introduction aux notions centrales d'algèbre linéaire à travers la résolution de systèmes d'équations linéaires. SOMMAIRE. Introduction au raisonnement mathématique : preuve directe, indirecte, par contradiction, par récurrence, langage ensembliste. Matrices et résolution de sytèmes d'équations linéaires : méthode de Gauss-Jordan, calcul matriciel, noyau et rang d'une matrice, matrices inversibles, matrices élémentaires et manipulation de lignes et colonnes. Déterminant : définition récursive, propriétés fondamentales, interprétation géométrique en dimensions 2 et 3, calculs explicites, règle de Cramer, formulation de l'inverse d'une matrice. Sous-espaces vectoriels et affines réels associés aux systèmes d'équations linéaires : introduction dans R^n aux notions de sous-espaces engendrés, intersection, somme, somme directe de deux sous-espaces ; dépendance linéaire, dimension. Matrices de changement de base. Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Applications linéaires : image et noyau et recherche de bases pour ces sous-espaces, théoréme du rang, isomorphisme, représentation matricielle et formule de changement de base. Introduction à la réduction des matrices : valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation des matrices symétriques. Ce cours comporte une séance de travaux pratiques (TP) de trois heures par semaine. Certaines séances de travaux pratiques pourraient servir à évaluer la progression des étudiants, en complément des examens, afin d'assurer le meilleur encadrement dans ce cours.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?

« Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. » Clairaut (1713-1765), *Élémens de géométrie*, 1741.

Plutôt jeune (page suiv.) l'algèbre linéaire fait aujourd'hui partie des connaissances mathématiques de base. Elle tient cette place à la fois par les applications à des domaines variés que fournissent ses méthodes et qui la rend en cela comparable au calcul différentiel et intégral, que par les multiples liens qu'elle entretient avec le reste des mathématiques (géométrie, autres domaines de l'algèbre, calcul différentiel et intégral, etc.). Le cours sera axé sur la maîtrise des techniques de base et des concepts fondamentaux, par des exemples étudiés en détails. (*voir l'échéancier ci-dessous*)

Objectifs généraux Que vise ce cours?
Vous faire maîtriser les techniques et notions de base de l'algèbre matricielle et des espaces vectoriels. Vous faire percevoir l'importance des concepts abstraits. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement
– À chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion.
– Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle un auxiliaire d'enseignement, Maxime Gélinas/Mathieu Gaudreau, sera là pour répondre à vos questions et exposer les solutions d'exercices plus difficiles. Le groupe sera séparé en deux. Les auxiliaires d'enseignement seront aussi disponibles chaque semaine (à déterminer) pour répondre à vos questions individuellement.
– Chaque semaine, le lundi de 15h à 17h vous est réservé pour consultation individuelle à mon bureau. En cas de difficulté, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By Arthur Cayley, *Esq.*, *F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, &c.: the law of the addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities; as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible; it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrive at the notion of a rational and integral function, or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. the determi-

TABLE DES MATIÈRES

« C'est dans la cuve gauche du fondoir du Pequod (…) que je fus frappé pour la première fois – indirectement – par le fait remarquable qu'en géométrie tous les corps glissant le long d'une cycloïde – ma pierre à polir par exemple – arrivent au bas de n'importe quel point en un temps identique. »
Melville (1819-1891), *Moby Dick*, 1851.

I. *Algèbre des matrices*. Produit scalaire, partition de matrice, combinaison linéaire.

II. *Systèmes d'équations linéaires.* Élimination de Gauss-Jordan et forme paramétrique des solutions, matrices élémentaires, élimination vs factorisation, moindres carrés.

III. *Déterminants*. Propriétés des déterminants, développement de Laplace, règle de Cramer.

IV. *Espaces vectoriels associés à une matrice*. Vecteurs ligne, vecteurs colonnes, sous-espace, espace ligne, espace colonne, image, noyau, indépendance linéaire, base, dimension, coordonnées par rapport à une base, changements de base.

V. *Applications linéaires.* Applications ensemblistes, application inverse, bijection, applications linéaires, noyau, image, représentation matricielle, changement de base, isomorphismes.

VI. *Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice.* Vecteur propre, valeur propre, espace propre, matrice diagonalisable, diagonalisation des matrices symétriques.

ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

Semaine 1. (3 sept.) Introduction au cours. Formulation du produit matriciel à l'aide du produit scalaire.

Semaine 2. (8-10 sept.) Partition de matrices, combinaison linéaire de matrices. Systèmes linéaires: élimination et forme paramétrique de l'ensemble solution.

Semaine 3. (15-17 sept.) Opérations élémentaires de ligne, équivalence de ligne, matrices élémentaires. Traduction des opérations élémentaires de lignes en factorisation des matrices.

Semaine 4. (22-24 sept.) Factorisation LU, matrices inversibles. Vecteurs lignes, vecteurs colonnes, sous-espace, espaces associés à une matrice : espace ligne, espace colonne, noyau, image.

Semaine 5. (29 sept.-1er oct.) Déterminant d'une matrice carrée, propriétés fondamentales, développement de Laplace. Règle de Cramer.

Semaine 6. (6-8 oct.) Projections orthogonales et moindres carrés. Ensemble de générateurs, sous-espace engendré, indépendance linéaire, ensemble minimal de générateurs.

Semaine 7. (15 oct.) Base et dimension.

Semaine 8. (20-22 oct.) / **EXAMEN I** (22oct)/ Coordonnées par rapport à une base, changements de base.

Semaine 9. (27-29 oct.**)** Base et dimension des espaces associés à une matrice. Exemples.

Semaine 10. (3-5nov.) Applications ensemblistes, applications linéaires. Représentation matricielle des applications linéaires et propriétés élémentaires.

Semaine 11. (10-12 NOV.) Changements de base. Introduction aux vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice, définitions.

Semaine 12. (17-19 nov.) Matrices diagonalisables. Polynôme caractéristique, valeur propre et espace propre.

Semaine 13. (24-26 nov.) Exemples. Diagonalisation des matrices symétriques.

Semaine 14. (1-3 déc.) Diagonalisation des matrices symétriques (suite).

Semaine 15. (8-10 déc.) Exemples. Synthèse.

Semaine 16. (15-17 déc.) **EXAMEN II** (17 décembre).

LE COURS ALGÈBRE LINÉAIRE I DANS VOTRE FORMATION

Ce cours est une introduction à l'étude de niveau universitaire de l'algèbre linéaire. Il est obligatoire en première année dans le cheminement-type des étudiantEs inscritEs aux programmes de premier cycle en mathématiques. Les méthodes de travail et de pensée qui y sont enseignées devraient donc être valables pour l'ensemble de vos études de premier cycle.

Le cours est également ouvert aux étudiantEs libres et aux étudiantEs inscritEs dans d'autres programmes. Il se peut que vous ayez une expérience préalable du monde universitaire et de ses méthodes. Il vous sera toutefois demandé de répondre aux mêmes critères que les autres étudiantEs et de vous initier à la pensée mathématique. Si, au gré de votre parcours, vous aviez déjà acquis les méthodes de travail qui feront l'objet de certains cours, tant mieux !

Présence au cours

Les présences au cours ne sont pas comptabilisées. Cependant, le contenu des cours, bien que suivant le manuel selon l'échéancier ci-dessus, se trouvera augmenté de commentaires et de quelques notions et exemples absents de ce manuel.
Si vous manquez un cours, assurez-vous de demander les notes de cours à l'un ou l'une de vos collègues de classe. Aucune information sur le contenu des cours manqués ne sera envoyée par le professeur.
Toute absence à un examen équivaut à un échec de cette évaluation, sauf en cas de force majeure[1]. Dans un tel cas, et sans exception, vous aurez à fournir une pièce justicative et à vous entendre avec le professeur pour le rattrapage de l'évaluation manquée.
Vous êtes inviteEs à être particulièrement vigilantEs durant la seconde moitié de la session : c'est souvent à ce moment que l'on choisit de terminer les travaux qui s'accumulent plutôt que d'assister au cours. Il est conseillé de prévoir, dès le début de la session, le nombre et l'ampleur des travaux qui sont exigés dans l'ensemble de vos cours.

Les séances d'exercices

Les séances d'exercices sont parties intégrantes du cours. Se poser des problèmes et les résoudre au moyen des outils mis à votre disposition en classe est la pierre angulaire de votre formation mathématique. Sans cela, vous échouerez. Il n'est pas essentiel de savoir résoudre tous les problèmes, mais il est essentiel d'y penser et d'essayer de les résoudre dans un temps raisonnable. Les solutions des exercices que vous aurez à préparer seront exposées au tableau durant les séances d'exercices.

Circonstances particulières

Si vous avez des problèmes de santé, problèmes d'apprentissage, dyslexie, etc., veuillez en aviser le professeur le plus tôt possible. Plusieurs services uqamiens peuvent être mis à contribution afin de vous aider.

Le site internet du cours

La consultation de la page internet du cours dans le système Moodle (http://moodle.uqam.ca) est obligatoire dans ce cours. Plusieurs documents, liens vers des sites internet, devoirs et consignes s'y trouveront qui ne figurent pas dans le manuel ou dans ce plan de cours, ni ne seront distribués en classe.

[1] Cas de force majeure : maladie, décès ou hospitalisation d'un parent proche, accident, etc. Ne sont pas inclus dans les cas de force majeure : un réveil-matin dysfonctionnel, une panne de métro, un emploi, une panne d'imprimante la veille, etc.

Courriel UQAM
Votre adresse de courriel normalisée de l'UQAM (...@courrier.uqam.ca) est la seule qui sera utilisée par le professeur pour communiquer avec vous. Vous avez la responsabilité de consulter ce courriel régulièrement. De même, tout message envoyé par vous au professeur au moyen d'une autre adresse de courriel (hotmail, gmail, yahoo, etc.) peut être bloquée par le serveur de l'UQAM.

Écrire au professeur
Dans toutes vos communications par courriel au professeur, n'oubliez pas de donner un titre clair à votre message (le professeur n'ouvre pas les messages portant des titres tels que « Salut ! » ou « Mes réflexions profondes », ou encore « En passant »), et d'y poser une question claire et précise (le professeur ne répond pas au message dont la question est « Je ne comprends pas l'exercice 2 !» , « Et si j'additionne deux, je risque de tomber sur le bon résultat ? » etc.). Si vous écrivez au professeur, vous devriez recevoir une réponse dans un délai de 48 heures (deux jours) ouvrables ; cela exclut donc les jours fériés et les fins de semaines. En ce sens, il est préférable d'éviter les demandes urgentes ou de dernière minute et de prévoir à l'avance vos échéances de travaux.

À faire

La lecture des sections appropriées du manuel avant chaque séance de cours. Les pages seront annoncées dans le site internet du cours.

Des exercices à préparer chaque semaine qui seront discutés et corrigés lors de la séance d'exercices de la semaine suivante. Les exercices seront annoncés dans le site internet du cours.

Parfois, s'ajouteront des exercices donnés en classe, ou d'autres lectures obligatoires qui seront annoncées dans le site internet du cours.

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire. La note de passage du cours est fixée à 60%.

(A) DESCRIPTION SOMMAIRE

		Échéance	Pondération
-	Devoirs	Hebdomadaire (environ 10)	20 %
-	Examen 1	22 octobre (8e semaine)	35 %
-	Examen 2	17 décembre	45 %

(B) DESCRIPTION DÉTAILLÉE

Devoirs hebdomadaires

Pour bien comprendre ce cours il est important d'en maîtriser les techniques. Les devoirs hebdomadaires visent principalement ce but. Ils visent aussi à vous apprendre à communiquer clairement vos idées mathématiques.

Consignes

– Les devoirs peuvent être faits individuellement ou en équipe de deux à trois personnes. Chaque cosignataire devra rédiger sa propre copie et noter le nom des autres membres du groupe sur sa copie. Attention à ne pas plagier la copie de votre collaborateur (voir le règlement sur le plagiat à la fin du plan de cours). Le professeur se réserve le droit de convoquer individuellement les membres de chaque groupe pour fins d'évaluation ;
– les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format lettre, brochées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type.** Vous pouvez rédiger ces devoirs en utilisant un logiciel de traitement de texte (LaTex, etc.) ;
– **aucun devoir de la qualité d'un brouillon ne sera accepté** ;
– l**e code permanent** de chaque étudiant-es doit apparaître sur la copie **en haut à droite** ;
– les consignes propres à chaque devoir.

Critères d'évaluation des devoirs

– Remettre chaque devoir est obligatoire : un certain nombre seulement de devoirs sera corrigé par semaine. Le choix se fera parmi la liste des noms des participants au cours. Si vous n'avez pas remis votre devoir, vous aurez automatiquement la note 0 ;
– chaque participant au cours aura au moins deux devoirs qui seront corrigés au cours de la session ;
– respect des consignes ;
– exactitude du raisonnement amenant à la solution, et exactitude des calculs ;
– jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique (symboles compris), qualité du français (0,5%/faute).

Remise des devoirs

Les devoirs doivent être remis au début de la séance d'exercices, à moins d'avis contraire. Ils seront corrigés par l'auxiliaire d'enseignement et rendus à la séance suivante.

Les examens

Les examens sont de type traditionnel. **Aucune documentation, calculatrice, ordinateur, téléphone, etc. n'est permis**. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php , et la fin du plan de cours).

Examen I. Il porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. Durée: 2 heures . Il aura lieu durant la séance d'exercices. Le cours précédent sera écourté.

Examen II. Il porte sur la matière vue depuis le début, jusqu'à une semaine avant l'examen, mais surtout celle vue depuis l'examen I. Durée: 3 heures.

Critères d'évaluation des examens : exactitude du raisonnement amenant à la solution, exactitude des calculs, bon usage du langage mathématique (symboles compris).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

P. Leroux. *Algèbre linéaire. Une approche matricielle*. Modulo Éditeur, 1991 [1983]. (QA188L47) *

LECTURE RECOMMANDÉE

G. Strang. *Introduction to linear Algebra* (4e édition). Wellesley-Cambridge Press, 2009. (QA184.2S78 2009)*

AUTRES

http://xmaths.free.fr: vous y trouverez des notes de cours et des exercices en accès libre.
http://images.math.cnrs.fr/ : la recherche mathématique en mots et en images.
G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod, 1962. (QA11P614)
S. Lipschutz, M. L. Lipson, *Algèbre linéaire*, Ediscience International / Dunod, (Collection Schaum), 2003. (QA251L5414)
A. Cayley, A memoir on the theory of matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 148, 1858, pp. 17-37.
S. Lang, *Algèbre linéaire* (2 volumes). Inter-Éditions, 1976. (QA184L3514)
G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications (*3e édition). Harcourt Brace Jovanovich Ed.. 1988. (QA184S76 1988)

RENSEIGNEMENTS

Le livre de Leroux est disponible à la COOP-UQAM pour environ 78 dollars (local PK-R205).
Les livres et documents suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.
Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles dans les bibliothèques de l'UQAM (QA : sciences) .

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.
Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php
Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique	**Article 3 - Sanctions**
2.1 Infraction Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement. *2.2 Liste non limitative des infractions* Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer : a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité; b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence; c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant; d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen; e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques; f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne; g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle; h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation; i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances; j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.	*3.1 L'attribution de la mention «P»* L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier. Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes. *3.2 La mise en probation et autres sanctions* a) la *mise en probation;* La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement. La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée. Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes : b) l'échec au cours ou à l'activité créditée; c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés; d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs; e) son expulsion définitive de l'Université.