Université du Québec à Montréal
Département de mathématiques

Automne 2012

PLAN DE COURS

MAT 1203 groupe 11, ALGÈBRE LINÉAIRE I

Lundi de 13h30 à 15h, et mercredi de 13h30 à 15h30*, local SH-3620.
Séance d'exercices le lundi de 15h à 17h, local SH-3620.
Professeur: LUC BÉLAIR.
BUREAU: PK-5330, tél.: 514-987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca .

Description du cours selon l'annuaire

Faire l'étude des systèmes d'équations linéaires et algèbre des matrices. Opérations élémentaires de lignes, équivalence de lignes et réduction des matrices. Concept de combinaison linéaire. Opérations élémentaires de lignes, équivalence de lignes et réduction des matrices; matrices élémentaires. Inversion des matrices, algorithmes. Espaces vectoriels, sous-espaces; sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs. Dépendance linéaire, bases, dimension (cas fini). Transformations linéaires, représentation matricielle, similitude, image et noyau. Déterminants; inversibilité, développement de Laplace et règle de Cramer. Produit scalaire, projections orthogonales, orthogonalisation de Gram-Schmidt. Moindres carrés. Problème de la diagonalisation. Polynôme caractéristique, valeurs et vecteurs propres, forme triangulaire. Matrices orthogonales; théorème des axes principaux et diagonalisation orthogonale des matrices symétriques. Ce cours comporte une séance d'exercices de deux heures par semaine.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?

En plus de retrouver vos matrices favorites, nous allons rendre les vecteurs plus propres et retrouver les ancêtres des faux bourdons.
Relativement jeune (voir page suivante) l'algèbre linéaire fait aujourd'hui partie des connaissances mathématiques de base. Elle tient cette place à la fois par les applications à des domaines variés que fournissent ses méthodes et qui la rend en cela comparable au calcul différentiel et intégral, que par les multiples liens qu'elle entretient avec le reste des mathématiques (géométrie, autres domaines de l'algèbre, calcul différentiel et intégral, etc.).
Le cours sera axé sur la maîtrise des techniques de base et des concepts fondamentaux, par des exemples étudiés en détails. (*voir l'échéancier ci-dessous*)

Objectifs généraux Que vise ce cours?

Vous faire maîtriser les techniques et notions de base de l'algèbre matricielle et des espaces vectoriels. Vous faire percevoir l'importance des concepts abstraits. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement

- À chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion. Vous serez appelé-e-s à lire les sections appropriées du manuel auparavant. Cette lecture fait partie du cours.
- Le cours aura un site internet dans le système Moodle **http://www.moodle.uqam.ca** . Il contiendra toute l'information reliée au cours (pages à lire, exercices, solutionnaires, etc.)
- Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle un auxiliaire d'enseignement, M. Eduardo Blazek, sera là pour répondre à vos questions, vérifier vos solutions aux exercices et exposer les solutions d'exercices plus difficiles. M. Blazek sera aussi disponible 2h par semaine (à déterminer) pour répondre à vos questions individuellement.
- Chaque semaine, **le mardi de 14h à 16h vous est réservé pour consultation individuelle à mon bureau**. En cas de difficulté, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By Arthur Cayley, *Esq.*, *F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, &c.: the law of the addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities; as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible; it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrive at the notion of a rational and integral function, or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. the determi-

TABLE DES MATIÈRES

I. *Algèbre des matrices*. Produit scalaire, partition de matrice, combinaison linéaire.

II. *Systèmes d'équations linéaires*. Élimination de Gauss-Jordan et forme paramétrique des solutions, matrices élémentaires, élimination vs factorisation, moindres carrés.

III. *Déterminants*. Propriétés des déterminants, développement de Laplace, règle de Cramer.

IV. *Espaces vectoriels associés à une matrice*. Vecteurs ligne, vecteurs colonnes, sous-espace, espace ligne, espace colonne, image, noyau, indépendance linéaire, base, dimension, coordonnées par rapport à une base, changements de base.

V. *Applications linéaires*. Applications ensemblistes, application inverse, bijection, applications linéaires, noyau, image, représentation matricielle, changement de base, isomorphismes.

VI. *Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice*. Vecteur propre, valeur propre, espace propre, matrice diagonalisable, diagonalisation des matrices symétriques.

ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

Semaine 1. (1-3 oct.) Introduction au cours, formulation du produit matriciel à l'aide du produit scalaire. Partition de matrices, combinaison linéaire de matrices.

Semaine 2. (10 oct.). Systèmes linéaires: élimination et forme paramétrique de l'ensemble solution. Opérations élémentaires de ligne, équivalence de ligne, matrices élémentaires.

Semaine 3. (15-17 oct.) Traduction des opérations élémentaires de lignes en factorisation des matrices. Factorisation LU, matrices inversibles.

Semaine 4. (22-24 oct.) Vecteurs lignes, vecteurs colonnes, sous-espace, espaces associés à une matrice : espace ligne, espace colonne, noyau, image. Déterminant d'une matrice carrée, propriétés fondamentales, développement de Laplace.

Semaine 5. (29-31 oct.) Règle de Cramer. Ensemble de générateurs, sous-espace engendré. **EXAMEN I SAMEDI 3 NOVEMBRE ~~9H30-12H30~~** 9h30-11h30

Semaine 6. (5-7 nov.) Ensemble de générateurs, sous-espace engendré, indépendance linéaire, ensemble minimal de générateurs. Base et dimension.

Semaine 7. (12-14 nov.) Coordonnées par rapport à une base, changements de base. Base et dimension des espaces associés à une matrice.

Semaine 8. (19-21 nov.) Applications ensemblistes, applications linéaires. Représentation matricielle des applications linéaires et propriétés élémentaires, changements de base.

Semaine 9. (26 – 28 nov.) Introduction aux vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice, définitions, matrices diagonalisables. Polynôme caractéristique, valeur propre et espace propre.

Semaine 10. (3-5 déc.) Diagonalisation des matrices symétriques.

Semaine 11. (10-12 NOV.) Diagonalisation des matrices symétriques(fin).

Semaine 12. (17-19 déc.) Synthèse. **EXAMEN II SAMEDI 22 DÉCEMBRE ~~9H30-12H30~~**
14h-17h.

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire. La note de passage du cours est fixée à 60%.

(A) DESCRIPTION SOMMAIRE	Échéance	Pondération
- Devoirs	Hebdomadaire (environ 8)	20 pourcent
- Examen I	Le samedi 3 novembre	35 pourcent
- Examen II	Le samedi 22 décembre	45 pourcent

(B) DESCRIPTION DÉTAILLÉE

Devoirs hebdomadaires

Pour bien comprendre ce cours il est important d'en maîtriser les techniques. Les devoirs hebdomadaires visent principalement ce but. Chacun comprend une question sur la matière vue durant la semaine. **Les devoirs doivent être fait en équipe de deux**.

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution
- exactitude des calculs
- jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique, qualité du français.

Présentation matérielle des devoirs. Les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format 21,7cm x 28cm agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type. Le code permanent** de chacun des deux étudiant-es doit apparaître sur la copie **en haut à droite**.

***Remise des devoirs*. Les devoirs doivent être remis au plus tard à 16h30 à la date demandée.** Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans Internet à la date de remise. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans Internet.

Les examens

Les examens sont de type traditionnel. **Aucune documentation ni calculatrice n'est permise**. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php).

Examen I. Il porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen. Durée: 2 heures .

Examen II. Il porte sur la matière vue depuis le début, jusqu'à une semaine avant l'examen, mais surtout celle vue depuis l'examen I. Durée: 3 heures.

Critères d'évaluation des examens

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution;
- Exactitude des calculs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

P. Leroux. *Algèbre linéaire. Une approche matricielle.* Modulo Éditeur, 1991 [1983]. (QA188L47) *

LECTURE RECOMMANDÉE

G. Strang. *Introduction to linear Algebra* (4e édition). Wellesley-Cambridge Press, 2009. (QA184.2S78 2009)*

AUTRES

F. Ayres. *Matrices, cours et problèmes.* Mc-Graw Hill, série Schaum, 1973. (QA263A914)

A. Cayley, A memoir on the theory of matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 148, 1858, pp. 17-37.

R. Cairoli, *Algèbre linéaire* vol. 1 et 2. Presses polytechniques romandes, 1991. (QA184C34)

S. Lang, *Algèbre linéaire* (2 volumes). Inter-Éditions, 1976. (QA184L3514)

B. Noble, *Applied Linear Algebra* (3e éd.). Prentice-Hall, 1988. (QA251N54)

G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème.* Dunod, 1962. (QA11P614)

G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications (*3e édition). Harcourt Brace Jovanovich Ed.. 1988. (QA184S76 1988)

V. Voevodin, *Principes numériques d'algèbre linéaire.* Éditions MIR, 1976. (QA184V6314)

RENSEIGNEMENTS

Le livre de Leroux est disponible à la COOP-UQAM pour environ 70 dollars.
(local permanent PK-R205)

Les livres et documents suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.

Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles dans les bibliothèques de l'UQAM (QA : sciences) .