Université du Québec à Montréal ***Automne 2010***
Département de mathématiques

PLAN DE COURS

MAT 1203 groupe 10, ALGÈBRE LINÉAIRE I

.....

Lundi de 13h30 à 15h, mercredi 14h à 15h30, local SH-3420.
Séance d'exercices le lundi de 15h à 17h, local SH-3420.
Professeur: LUC BÉLAIR.
BUREAU: PK-5330, tél.: 514-987-3000, poste 8234 ; belair.luc@uqam.ca .

Description du cours selon l'annuaire

Faire l'étude des systèmes d'équations linéaires et algèbre des matrices. Opérations élémentaires de lignes, équivalence de lignes et réduction des matrices. Concept de combinaison linéaire. Opérations élémentaires de lignes, équivalence de lignes et réduction des matrices; matrices élémentaires. Inversion des matrices, algorithmes. Espaces vectoriels, sous-espaces; sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs. Dépendance linéaire, bases, dimension (cas fini). Transformations linéaires, représentation matricielle, similitude, image et noyau. Déterminants; inversibilité, développement de Laplace et règle de Cramer. Produit scalaire, projections orthogonales, orthogonalisation de Gram-Schmidt. Moindres carrés. Problème de la diagonalisation. Polynôme caractéristique, valeurs et vecteurs propres, forme triangulaire. Matrices orthogonales; théorème des axes principaux et diagonalisation orthogonale des matrices symétriques. Ce cours comporte une séance d'exercices de deux heures par semaine.

Contenu du cours Qu'allons-nous faire durant ce cours?

En plus de retrouver vos matrices favorites, nous allons rendre les vecteurs plus propres et retrouver les ancêtres des faux bourdons.

Relativement jeune (voir page suivante) l'algèbre linéaire fait aujourd'hui partie des connaissances mathématiques de base. Elle tient cette place à la fois par les applications à des domaines variés que fournissent ses méthodes et qui la rend en cela comparable au calcul différentiel et intégral, que par les multiples liens qu'elle entretient avec le reste des mathématiques (géométrie, autres domaines de l'algèbre, calcul différentiel et intégral, etc.).

Le cours sera axé sur la maîtrise des techniques de base et des concepts fondamentaux, par des exemples étudiés en détails. (*voir l'échéancier ci-dessous*)

Objectifs généraux Que vise ce cours?

Vous faire maîtriser les techniques et notions de base de l'algèbre matricielle et des espaces vectoriels. Vous faire percevoir l'importance des concepts abstraits. Vous faire développer l'expression claire, correcte et précise de vos idées mathématiques.

Types d'activités d'enseignement

- À chaque séance il y aura un exposé avec questions et discussion. Vous serez appelé-e-s à lire les sections appropriées du manuel auparavant. Cette lecture fait partie du cours.
- Le cours aura un site internet dans le système Moodle **http://www.moodle.uqam.ca** . Il contiendra toute l'information reliée au cours (pages à lire, exercices, solutionnaires, etc.)
- Chaque semaine, une période d'exercices vous est réservée pendant laquelle un-e auxiliaire d'enseignement sera là pour répondre à vos questions, vérifier vos solutions aux exercices et exposer les solutions d'exercices plus difficiles. Le groupe sera séparé en deux sous-groupes et les auxiliaires d'enseignement seront Ariane Garon et Sébastien Labbé.
- Chaque semaine, **le lundi de 10h à 12h vous est réservé pour consultation individuelle à mon bureau**. En cas de difficulté, n'hésitez pas à fixer un rendez-vous avec moi à un autre moment.

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By Arthur Cayley, *Esq.*, *F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \\ a''\ ,\ b''\ ,\ c'' \end{pmatrix}$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= ax + by + cz, \\ \mathrm{Y} &= a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{Z} &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \\ a''\ ,\ b''\ ,\ c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, &c.: the law of the addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities; as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible; it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrive at the notion of a rational and integral function, or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. the determi-

TABLE DES MATIÈRES

I. *Algèbre des matrices*. Produit scalaire, partition de matrice, combinaison linéaire.

II. *Systèmes d'équations linéaires*. Élimination de Gauss-Jordan et forme paramétrique des solutions, matrices élémentaires, élimination vs factorisation.

III. *Déterminants*. Propriétés des déterminants, développement de Laplace, règle de Cramer, permutations et formule de Leibnitz.

IV. *Espaces vectoriels associés à une matrice*. Vecteurs ligne, vecteurs colonnes, sous-espace, espace ligne, espace colonne, image, noyau, indépendance linéaire, base, dimension, coordonnées par rapport à une base, changements de base.

V. *Applications linéaires*. Applications ensemblistes, application inverse, bijection, applications linéaires, noyau, image, représentation matricielle, changement de base, isomorphismes.

VI. *Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice*. Vecteur propre, valeur propre, espace propre, matrice diagonalisable, diagonalisation des matrices symétriques.

ÉCHÉANCIER APPROXIMATIF

Semaine 1. (8 sept.) Introduction au cours. Formulation du produit matriciel à l'aide du produit scalaire.

Semaine 2. (13-15 sept.) Partition de matrices, combinaison linéaire de matrices. Systèmes linéaires: élimination et forme paramétrique de l'ensemble solution.

Semaine 3. (20-22 sept.) Opérations élémentaires de ligne, équivalence de ligne, matrices élémentaires. Traduction des opérations élémentaires de lignes en factorisation des matrices.

Semaine 4. (27-29 sept.) Factorisation LU, matrices inversibles. Vecteurs lignes, vecteurs colonnes, sous-espace, espaces associés à une matrice : espace ligne, espace colonne, noyau, image.

Semaine 5. (4-6 oct.) Déterminant d'une matrice carrée, propriétés fondamentales, développement de Laplace. Règle de Cramer, permutations, signature d'une permutation.

Semaine 6. (13 oct.) Formule de Leibnitz pour le déterminant.

Semaine 7. (18-20 oct.) Ensemble de générateurs, sous-espace engendré, indépendance linéaire, ensemble minimal de générateurs. Base et dimension.

Semaine 8. (25-27 oct.) / **EXAMEN I** / Coordonnées par rapport à une base, changements de base.

Semaine 9. (1-3 nov.) Base et dimension des espaces associés à une matrice. Exemples.

Semaine 10. (8-10 nov.) Applications ensemblistes, applications linéaires. Représentation matricielle des applications linéaires et propriétés élémentaires.

Semaine 11. (15-17 NOV.) Changements de base. Introduction aux vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice, définitions.

Semaine 12. (22-24 nov.) Matrices diagonalisables. Polynôme caractéristique, valeur propre et espace propre.

Semaine 13. (29 nov.-1er déc.) Exemples. Diagonalisation des matrices symétriques.

Semaine 14. (6-8 déc.) Diagonalisation des matrices symétriques (suite).

Semaine 15. (13-15 déc.) Exemples. Synthèse.

Semaine 16. (20 déc.) **EXAMEN II .**

ÉVALUATION

Voici les travaux que vous aurez à faire.

(A) Description sommaire	Échéance	Pondération
- Devoirs	hebdomadaire	20 %
- Examen I	(8e semaine) 25 octobre	35 %
- Examen II	(16e semaine) 20 décembre	45 %

(B) Description détaillée

Devoirs hebdomadaires

Pour bien comprendre ce cours il est important d'en maîtriser les techniques. Les devoirs hebdomadaires visent principalement ce but. Chacun comprend une sur la matière vue durant la semaine.

Critères d'évaluation des devoirs

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution
- exactitude des calculs
- jusqu'à 20% pourra être attribué à la rédaction: clarté, bon usage du langage mathématique, qualité du français.

Présentation matérielle des devoirs. Les devoirs doivent être faits sur des feuilles de **format 21,7cm x 28cm agrafées, sans couverture ni enveloppe d'aucun type.** Le code permanent de chaque étudiant-e doit apparaître sur la copie.

***Remise des devoirs*. Les devoirs doivent être remis en classe à la date demandée.** Un solutionnaire de chaque devoir sera déposé dans Internet à la date de remise. Aucune copie ne pourra être acceptée une fois le solutionnaire dans Internet.

Les examens

Les examens sont de type traditionnel. Aucune documentation ni calculatrice n'est permise. Chaque étudiant doit présenter sa carte de l'UQAM. Le cas échéant, tout examen différé a lieu aux dates fixées par le Département de mathématiques. Le cas échéant, toute infraction de nature académique sera sanctionnée selon le règlement sur les infractions de nature académique en vigueur à la Faculté des sciences (voir http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php).

Examen I. Il porte sur la matière vue depuis le début jusqu'à une semaine avant l'examen.
Durée: 2 heures (pendant la séance d'exercices; le cours qui précède sera écourté).

Examen II. Il porte sur la matière vue depuis le début, jusqu'à une semaine avant l'examen, mais surtout celle vue depuis l'examen I. Durée: 3 heures.

Critères d'évaluation des examens

- Exactitude du raisonnement amenant à la solution;
- Exactitude des calculs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MANUEL

P. Leroux. *Algèbre linéaire. Une approche matricielle.* Modulo Éditeur, 1991 [1983]. (QA188L47) *

LECTURE RECOMMANDÉE

G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications (*3e édition). Harcourt Brace Jovanovich Ed.. 1988. (QA184S76 1988) *

AUTRES

F. Ayres. *Matrices, cours et problèmes.* Mc-Graw Hill, série Schaum, 1973. (QA263A914)

A. Cayley, A memoir on the theory of matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 148, 1858, pp. 17-37.

R. Cairoli, *Algèbre linéaire* vol. 1 et 2. Presses polytechniques romandes, 1991. (QA184C34)

S. Lang, *Algèbre linéaire* (2 volumes). Inter-Éditions, 1976. (QA184L3514)

B. Noble, *Applied Linear Algebra* (3e éd.). Prentice-Hall, 1988. (QA251N54)

G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème.* Dunod, 1962. (QA11P614)

V. Voevodin, *Principes numériques d'algèbre linéaire.* Éditions MIR, 1976. (QA184V6314)

RENSEIGNEMENTS

Le livre de Leroux est disponible à la COOP-UQAM pour environ 70 dollars.
(local permanent PK-R205)

Les livres et documents suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.

Dans la bibliographie, les expressions entre parenthèses indiquent la cote des livres disponibles dans les bibliothèques de l'UQAM (QA : sciences) .

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.

Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique

2.1 Infraction

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement.

2.2 Liste non limitative des infractions

Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer :

a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité;
b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen;
e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques;
f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne;
g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation;
i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Article 3 - Sanctions

3.1 L'attribution de la mention «P»

L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier.

Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes.

3.2 La mise en probation et autres sanctions

a) la *mise en probation;*

La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement.

La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée.

Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes **:**

b) l'échec au cours ou à l'activité créditée;
c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés;
d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs;
e) son expulsion définitive de l'Université.