MAT1130 : ANALYSE I - HIVER 2021

Professeur : Olivier Collin
Horaire : Cours magistral : Mardi 11h–12h30 et Jeudi 9h–10h30
Travaux pratiques : Jeudi 10h30–12h30
Soutien : Mardi 12h30 (amenez votre lunch !)
Bureau : PK-5340
Tél : 987-3000 poste 3398
Courriel : collin.olivier@uqam.ca

Description officielle :
Rappels sur les ensembles, le principe d'induction mathématique, les entiers et les nombres rationnels. Le caractère incomplet des rationnels. Notion de majorant, minorant, suprémum et infimum. Propriétés élémentaires des nombres réels. Suites convergentes et de Cauchy. Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences. Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts dans $\mathbb{R}$. Théorème des intervalles emboîtés.
Définition des séries infinies, étude de leur convergence grâce à divers critères : Cauchy, D'Alembert, Leibniz, comparaison, etc. Convergence absolue et ses conséquences pour les réarrangements de séries. étude de quelques séries remarquables : séries harmoniques, géométriques, etc.
Fonctions continues : définition et diverses caractérisations. Propriétés élémentaires des fonctions continues. Propriétés fondamentales : Atteinte du suprémum sur un ensemble compact, Théorème de la valeur intermédiaire et conséquences. Continuité uniforme.
Signification géométrique de la dérivée. Extrema et points d'inflexion, convexité et concavité. Théorème de Rolle et applications. Théorème des accroissements finis. Théorème de la fonction inverse. Formule de Taylor.

Objectifs du cours :
Etablir les bases de l'Analyse mathématique. Faire l'étude rigoureuse des fondements de la théorie des fonctions d'une variable réelle : construction des nombres réels, suites et séries numériques, continuité et dérivabilité de fonctions réelles. Les objets étudiés dans ce cours sont en apparence simples, la difficulté du sujet est plutôt de développer une aisance à démontrer de façon précise des résultats mathématiques souvent clairs intuitivement. On voudra comprendre comment ce sujet, de par sa méthode, est central aux mathématiques modernes.

Plan de cours :

Chapitre I : Les nombres réels

- I.1 Ensembles, applications, relations d'ordre, nombres entiers, Principe d'induction
- I.2 Les nombres rationnels et leur caractère incomplet
- I.3 Construction des réels et propriétés élémentaires
- I.4 Intervalles emboîtés
- I.5 Suites convergentes
- I.6 Théorème de Bolzano-Weierstrass
- I.7 Théorème de recouvrement de Borel
- I.8 Ensembles fermés et ouverts dans $\mathbb{R}$

Chapitre II : Séries infinies

- II.1 Somme d'une série
- II.2 Séries à termes positifs
- II.3 Séries arbitraires et diverses notions de convergence

Chapitre III : Fonctions continues

- III.1 Fonctions définies sur $\mathbb{R}$
- III.2 Ensemble de points de discontinuité
- III.3 Propriétés élémentaires et la classe des fonctions continues
- III.4 Propriétés fondamentales de la continuité

Chapitre IV : Fonctions remarquables

- IV.1 Fonctions linéaires
- IV.2 Fonctions exponentielle et logarithmique
- IV.3 Longueur d'arc
- IV.4 Fonctions trigonométriques

Chapitre V : Fonctions dérivables

- V.1 Définitions élémentaires et la classe des fonctions dérivables
- V.2 Propriétés de la dérivée
- V.3 Théorème de Taylor et fonctions infiniment dérivables

Remarques importantes :

(1) Les notes de cours distribuées aideront les étudiantes et étudiants à suivre lors des séances de cours magistral et le professeur s'attend donc à une participation active de tout le monde lors des séances. Il sera également impératif de travailler par soi-même la matière, à l'extérieur des heures de cours, pour en saisir complètement l'essence.

(2) Les divers exercices donnés à résoudre font partie intégrante du cours : on ne peut apprendre les mathématiques qu'en les lisant, il faut les *faire*. En particulier la présence aux séances de travaux pratiques est très fortement conseillée.

(3) Ce cours est difficile. N'attendez pas plusieurs semaines après le début de la session pour commencer à travailler la matière.

Ouvrages de référence :
Des notes de cours couvrant tous les chapitres seront distribuées en format PDF. Le cours magistral s'appuiera essentiellement sur ces notes, si bien qu'**il n'y a pas de manuel obligatoire à acheter pour suivre le cours**. Par contre il pourra être utile d'avoir un manuel de référence complémentaire pour faire de nombreux exercices et avoir un point de vue complémentaire. Voici deux suggestions :

M. Spivak, *Calculus*, Publish or Perish (2008, $4^{\text{ième}}$ édition). Ceux et celles qui voudraient un bijou mathématique dans leur bibliothèque chercheront à se procurer ce livre sur Internet.

W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Dunod (2006). Il s'agit d'une traduction française par Guy Auliac du grand classique de Walter Rudin, dont la dernière édition en anglais remonte à 1976.

Evaluation proposée :

(1) Quiz (2) faits au début de certaines séances de TP, comptant pour un total de 10% de la note finale.

(2) Devoirs (2) comptant pour un total de 10% de la note finale.

(3) Examens intra (2) : maximum 25% et minimum 15%.

(4) Examen final cumulatif comptant pour 40% de la note finale.

Il est proposé que si la performance d'un étudiant ou une étudiante à l'examen final est *spectaculaire* (note intra minimum + 25 points ou mieux), le final comptera alors pour 50% de la note finale (et l'intra minimum seulement 5%).

Heures de disponibilité : Lundi 13h–15h ou sur rendez-vous (dans tous les cas m'envoyer un courriel la veille pour confirmer).