Université du Québec à Montréal, **Automne 2008**
Département de Mathématiques

PLAN DE COURS
MAT1007 groupe 20 Algèbre I

Professeur : Christophe Hohlweg
(bureau : PK-4230, tél : 514-987-3000, poste 2566, hohlweg.christophe@uqam.ca)
Enseignant aux sessions de problèmes : Laure Lejeune.
Horaires :

Cours : Les Mardi et Jeudi de 13h30 à 15h00 (PK-3605).

Problèmes : Les Mardi de 15h à 17h (PK-3605).

Les *cours* débutent le mardi 2 septembre à 13h30 et finiront le jeudi 4 décembre à 15h00.

Les *sessions de problèmes* débutent le mardi 9 septembre à 15h00 et finiront le mardi 9 décembre avec un session de révision de 13h30 à 17h00.

L'examen final aura lieu le jeudi 11 décembre de de 12h30 à 15h30.

DESCRIPTION DU COURS : L'algèbre est la branche des mathématiques qui étudie les structures algébriques : une structure algébrique est un ensemble associé à une ou plusieurs lois de composition. Par exemple, l'ensemble des entiers avec l'addition et/ou la multiplication.

Le but de l'algèbre est d'exhiber des modèles où les propriétés communes de certains ensembles y sont traitées de manière unifiée, ce qui évite de recommencer leur étude à chaque nouveau type rencontré. Par exemple les groupes sont des modéles où l'on étudie des lois tels la multiplication ou l'addition.

L'algèbre, avec la théorie des ensembles, est devenue un pilier du langage et de la pensée mathématique.

OBJECTIF DU COURS : Le but de ce cours est de donner à tout étudiant du baccalauréat de mathématique une connaissance suffisamment large des structures algébriques classiques (monoïdes, groupes, anneaux et corps) mais aussi de développer l'art de la pensée abstraite mathématique.

Nous commencerons par apprendre à s'exprimer en mathématique, mais aussi aux différentes méthodes de preuve. Ensuite, nous verrons un peu de théorie des ensembles et nous étudierons les nombres entiers (arithmétique dans $\mathbb{Z}$). Enfin, nous nous interèsserons aux structures algébriques abstraites classiques (monoïdes, groupes, anneaux et corps). Dans les cas des groupes, cette étude sera plus avancées : on ira jusqu'à l'étude des groupes quotients et propriété du groupe quotient (théorèmes d'isomorphisme).

La poursuite de l'étude des groupes, mais aussi l'étude appronfondie des anneaux et des corps est l'objet du cours MAT2000 Algèbre 2.

Autant que possible, je rappellerai toutes les notions prérequises.

PLAN DÉTAILLÉ :

Semaine 1. **Chapitre 1 : Logique, ensembles et nombres entiers.** S'exprimer en mathématique (enoncé, preuve et raisonnement); Ensemble, éléments d'un ensemble, ensemble vide, sous-ensembles, différence, complémentaire; les entiers et axiome du bon ordre, propriété de récurrence sur les entiers (conséquence du bon ordre), algorithme d'Euclide.

Semaine 2. divisibité, pgcd, pgcd et algorithme d'Euclide, entiers premiers entre eux et théorème de Bézout, théorème de Gauss et résolution des équation $ax + by = c$ dans les entiers; union, intersection, Lois de Morgan; nombres pairs et impaires, multiples et ppcm.

Semaine 3. Ensembles finis, nombres premiers, théorème fondamental de l'arithmétique. Produit cartésien d'ensembles, relations, relations d'ordre, relations d'équivalence sur les ensembles. classes de congruence, théorème chinois; Devoir 1.

Semaine 4. **Chapitre 2 : Fonctions et suites.** fonction, composition de fonctions, injectivité et surjectivité, bijection, cardinalité d'un ensemble, suites arithmétiques et géométriques. Quizz 1.

Semaine 5. **Chapitre 3 : Structure de groupes.** Loi de composition interne et externe sur un ensemble, Monoïdes; groupes, groupes finis, groupes abéliens, Produit directe de groupe, table de Caylay; Devoir 1 à remettre.

Semaine 6. sous-groupes, sous-groupe engendré, morphismes de groupes, monomorphimes, épimorphisme, isomorphismes et théorème de Caylay.

Semaine 7. Classe modulo un sous-groupe, classes à droite, à gauche, Théorème de Lagrange, Indice d'un sous-groupe.

Semaine 8. Corrections des exercices et séance de révision; Examen de mi-session.

Semaine 9. **Chapitre 4 : Sous-groupes normaux et groupes quotients.** sous-groupe normal, groupe quotient, théorèmes d'isomorphisme;

Semaine 10. **Chapitre 5 : Exemples classiques de groupes.** Groupes monogènes et cycliques; groupes diédraux. Devoir 2.

Semaine 11. groupe symétrique (générateurs, transpositions simples, décomposition en cycles disjoints, signature, groupe alterné); Quizz 2.

Semaine 12. **Chapitre 6 : Anneaux et corps.** Anneaux (éléments inversibles, anneau unitaire, anneau commutatif, anneau intègre, diviseur de 0), corps, sous-anneaux et sous-corps; l'anneau des polynômes (division euclidienne, racine d'un polynôme); Devoir 2 à remettre.

Semaine 13. Construction du corps des complexes et rappels (arguments, modules, formules de Moivre); décomposition des polynômes à coefficients réels ou complexes, théorème fondamental de l'algèbre;

Semaine 14. le corps des fractions rationnelles, le corps des fractions d'un anneau intègre, idéaux, anneau quotient, morphismes (théorème d'isomorphisme).

Semaine 15. Corrections des derniers exercices et séance de révision; Examen final.

CONTENU DES APPRENTISSAGES :

Chaque séance du cours fera l'objet d'un exposé avec questions et discussions.

Chaque semaine, une feuille d'exercices sera distribuée et la session de problème du mardi suivant sera dédiée à la correction de problèmes de cette feuille.

EVALUATION :

1. **2 examens** (40% chaque pour un total de 80%).

   Chaque examen aura une durée de trois heures.

   – L'*examen de mi-session* aura lieu le jeudi 23 octobre de 12h30 à 15h30.

   – L'*examen final* aura lieu le jeudi 11 décembre de 12h30 à 15h30.

2. **2 quizzs** (5% chaque pour un total de 10%).

   Chaque quizz aura une durée de 20 minutes et sera constitué d'un ou deux exercices. Le ou les exercices seront une variation d'un exercice donné en cours ou en session de problème.

   – Le *quizz 1* aura lieu le jeudi 25 septembre.

   – Le *quizz 2* aura lieu le jeudi 13 novembre.

3. **2 devoirs** (5% chaque pour un total de 10%).

   Chaque devoir sera constitué d'un problème à résoudre. *Toute personne qui rend un devoir, même si celui-ci est une feuille blanche avec nom et prénom, se verra attribué les 5% du devoir.*

   J'indiquerai cependant sur chaque devoir la note réelle dont il ne sera pas tenu compte mais qui vous servira d'auto-évaluation. Pour cette note, il sera tenu compte non seulement de la clarté des preuves mais aussi de la qualité de la rédaction.

   bf Préparer sérieusement ces devoirs et les sessions de problèmes est le meilleur moyen de se préparer aux examens.

   – Le *devoir 1* sera distribué le mardi 16 septembre et sera à remettre le jeudi 2 octobre **au plus tard**.

   – Le *devoir 2* sera distribué le mardi 4 novembre et sera à remettre le jeudi 20 novembre **au plus tard**.

RÈGLES ET CRITÈRES D'ÉVALUATIONS : Sera pris en compte : L'exactitude du raisonnement amenant à la solution; l'exactitude des calculs; jusqu'à 20% pourra être attribué à la qualité de la rédaction (clarté de la rédaction, bon usage du langage et des symboles mathématiques, qualité du français).

Bibliographie :

Principalement :

F. LIRET ET D. MARTINAIS, *Algèbre 1re année, 2e édition*, Dunod (2003). (*)
Chapitres 1,2,9,11,12, 3.

JOSETTE CALAIS, *Eléments de théorie des groupes*, PUF Mathématiques. (*)
Chapitres 1, 2, 3, 4.

Je recommande aussi les livres suivants :

S. LANG, *Structures algébriques*, InterEditions, Paris (1976). (*)

R. SMULLYAN, *Le livre qui rend fou*, Dunod (1997).

Les livres suivis d'une étoile (*) ont été mis en réserve à la Bibliothèque des sciences (Pavillon CO) et peuvent être consultés sur place.