UQÀM
Université du Québec à Montréal
Faculté des sciences
Département de mathématiques

ACT6220 : Mathématiques financières IV

Groupe 020 - Hiver 2009

(Cours optionnel - 3 crédits)

Professeur : Mathieu Boudreault

Coordonnées : Département de mathématiques
Bureau : PK-5715
Téléphone : (514) 987-3000 [8560]
Courriel : boudreault.mathieu@uqam.ca
Site web : www.math.uqam.ca/actuariat/boudreault

Démonstrateur: Vincent Roy-Léonard

Cours préalables : ACT2320 (Mathématiques financières III)
MAT3071 (Processus stochastiques)

Horaire du cours : Lundi 9h à 10h30 (Théorique) (12 janvier 2009 au 27 avril 2009)
Jeudi 9h à 10h30 (Théorique) (8 janvier 2009 au 23 avril 2009)
Jeudi 10h30 à 12h30 (Pratique)

Disponibilités : Sur rendez-vous

Matériel obligatoire : Notes de cours (fournies gratuitement sur le site web du cours)

Une des deux références suivantes est obligatoire :

- *Derivatives Markets*, 2e édition, Impression de 2008 (si possible), de Robert L. McDonald
  - Recommandé pour les étudiants qui préparent l'examen MFE de la Society of Actuaries
  - Il s'agit de la référence utilisée pour cet examen;
- *Options, futures and other derivatives*, 7e édition de John C. Hull
  - Il s'agit de la référence la plus recommandée pour les professionnels de la finance;
  - Recommandé pour les étudiants qui ne prépareront pas l'examen MFE dans un court délai;
  - Une version française est disponible (*Options, futures et autres actifs dérivés*, 6e édition);
- Plusieurs des exercices non évalués seront basés sur des exercices de fin de chapitre écrits dans ces deux livres. Les examens MFE des sessions précédentes seront aussi utilisés comme exercices pour le cours.

Description du cours

Tiré du site web du registraire de l'UQAM :
« Ce cours vise à initier les étudiants aux concepts des produits dérivés, à leur évaluation et leur utilisation pour le financement des produits d'assurances et de retraite.
Options européennes, américaines et exotiques: Évaluation par le modèle binomial à plusieurs niveaux. Marché aléatoire et mouvement brownien. Dérivation du modèle de Black-Scholes. Approximation du modèle de Black-Scholes par le modèle binomial. Définition et évaluation des contrats à terme *futures* et *forward*. Structure des taux d'intérêt: Durée, convexité, immunisation. Gestion actif-passif. Modèles stochastiques de taux d'intérêt. Évaluation de produits dérivés par simulation. »

Préalables

- ACT2320 (Mathématiques financières III)
  - Cours préalable obligatoire;
  - L'étudiant doit connaître la terminologie des marchés financiers et des produits dérivés;
- MAT3071 (Processus stochastiques)
  - Cours préalable obligatoire;
  - L'étudiant doit être très familier avec les différents types de mouvements browniens tels que mouvements brownien standard, arithmétique et géométrique;
- Éléments de programmation
  - L'étudiant doit pouvoir manipuler les différents outils de Microsoft Excel;
  - L'étudiant doit savoir créer des programmes à l'intérieur de Visual Basic dans Excel;
  - Idéalement, l'étudiant doit être familier avec un langage de programmation vectoriel tel que R, S-Plus ou Matlab.

Objectifs

Objectifs généraux
Ce cours a comme objectifs de préparer l'étudiant à:

1. Application des mathématiques financières aux problèmes concrets en finance et assurance;
2. Examen MFE de la Society of Actuaries;
3. Susciter un intérêt pour les études avancées en mathématiques financières;

Objectifs spécifiques
Notez que certaines sections peuvent ne pas être abordées en classe suite à des contraintes de temps

1. Introduction aux produits dérivés :
   a. Marchés financiers
      i. Définir les différents produits dérivés utilisés sur les marchés financiers;
      ii. Expliquer l'utilisation de ceux-ci dans différents contextes;
      iii. Différencier les différents intervenants sur les marchés financiers;
   b. Contrats à terme
      i. Définir les différents contrats à terme et leur utilité;
      ii. Comprendre ce qui détermine le prix des contrats à terme;
      iii. Évaluer des contrats à terme;

c. Options
   i. Comprendre les facteurs qui déterminent le prix d'une option;
   ii. Reproduire la relation de parité entre les options d'achat et de vente;
   iii. Utiliser les bornes sur les prix des options pour déterminer et exploiter une opportunité d'arbitrage;
   iv. Expliquer comment les dividendes et autres revenus sur l'actif sous-jacent peuvent influencer le prix d'une option;

d. Taux d'intérêt
   i. Différencier les types de taux d'intérêt;
   ii. Évaluer une obligation à coupons;
   iii. Comprendre les théories de la structure à terme de taux d'intérêt;
   iv. Relier ces théories avec les différentes formes de la structure à terme;

e. Swaps
   i. Évaluer des swaps d'intérêt et de devises;
   ii. Comprendre l'effet des avantages comparés dans la création des swaps;

2. Évaluation de produits dérivés

a. Rappels de probabilité
   i. Définir un processus stochastique, un processus markovien et une martingale;
   ii. Différencier une martingale d'un processus markovien;
   iii. Comprendre l'importance des martingales et des processus markoviens dans un contexte d'évaluation de produits dérivés;

b. Modèles de marché à temps discret
   i. Bâtir un arbre binomial et trinomial à plusieurs périodes dans un contexte d'évaluation de produits dérivés;
   ii. Comprendre les notions d'arbitrage et de complétion des marchés financiers dans un modèle à temps discret;
   iii. Bâtir un portefeuille de réplication pour reproduire les flux financiers d'un produit dérivé de type européen;
   iv. Utiliser l'évaluation neutre au risque pour calculer le prix d'un droit conditionnel;
   v. Comprendre les implications du théorème fondamental de tarification des actifs financiers;
   vi. Faire le lien entre le portefeuille de réplication et l'évaluation neutre au risque dans le cadre du théorème fondamental;
   vii. À l'aide du modèle binomial, être en mesure de trouver le portefeuille de réplication d'un droit conditionnel européen à chaque période;
   viii. À l'aide du modèle binomial, être en mesure d'évaluer un droit conditionnel européen ou américain;

c. Modèles de marché à temps continu
   i. Comprendre et relier les mouvements browniens standard, arithmétique et géométrique;
   ii. Définir ce qu'est un processus d'Ito et relier les équations différentielles stochastiques (EDS) aux intégrales stochastiques;
   iii. Appliquer le lemme d'Ito à des transformations simples pour trouver l'EDS d'une transformation;

iv. Trouver le portefeuille de réplication d'un droit conditionnel simple à l'aide de l'équation aux dérivées partielles;
v. Utiliser l'évaluation neutre au risque pour calculer le prix d'un droit conditionnel;
vi. Comprendre les implications du théorème fondamental de tarification des actifs financiers;
vii. Comprendre les implications du modèle et de la formule de Black-Scholes;
viii. Utiliser la formule de Black-Scholes dans la tarification d'options d'achat et de vente européennes;
ix. Utiliser la simulation pour tarifer des produits dérivés non conventionnels;

3. Modèles de taux d'intérêt
   a. Modèles à temps continu
      i. Évaluer des flux financiers dans un contexte de taux d'intérêt aléatoire;
      ii. Comprendre la construction du portefeuille réplicatif et de la mesure neutre au risque;
      iii. Relier les modèles de marché avec intérêt constant et intérêt aléatoire;
      iv. Différencier les différents modèles de taux d'intérêt et expliquer les avantages et inconvénients de chacun;
      v. Utiliser la simulation pour tarifer des droits conditionnels dépendants des taux d'intérêt;
   b. Modèles à temps discret
      i. Bâtir un arbre binomial de taux d'intérêt et l'utiliser dans la tarification de droits conditionnels;
      ii. Bâtir un arbre de Black-Derman-Toy et l'utiliser dans la tarification de droits conditionnels;
4. Éléments de gestion des risques
   a. Couverture et réplication de produits dérivés
      i. Comprendre et expliquer pourquoi il est impossible en pratique de répliquer de façon parfaite un produit dérivé dans le modèle de Black-Scholes;
      ii. Utiliser la réplication delta et gamma-neutre pour répliquer de façon quasi-parfaite les paiements d'un produit dérivé;
      iii. Définir les différentes lettres grecques (*Greeks*) et leur utilité dans la couverture de produits dérivés;
      iv. Utiliser la simulation pour analyser les approches de couverture;
   b. Réplication des titres à revenus fixes
      i. Définir et calculer la durée et la convexité dans un contexte de taux d'intérêt aléatoire;
      ii. Utiliser les principes de l'immunisation pour couvrir un passif à l'aide de la durée et la convexité;

Évaluation

- L'évaluation du cours comporte trois éléments :
  - Examen partiel;
  - Examen final (récapitulatif);
  - Travail pratique;
- Examen partiel (25%)
  - Couvre la matière des deux premières parties;
  - Examen entièrement à choix de réponses d'une durée de 1h30;
  - 15 questions bâties selon l'examen MFE;
  - Date : lundi 9 mars 2009 (9h à 10h30)
- Examen final (50%)
  - Couvre la matière du cours en entier;
  - Examen présenté en deux parties.
    - Première moitié (1h30) : 15 questions à choix de réponses, bâties selon l'examen MFE;
    - Seconde moitié (1h30) : questions à développement;
  - Date : lundi 27 avril 2009 (9h à 12h)
- Travail pratique (25%)
  - Exercices distribués périodiquement durant la session;
  - Divers éléments : programmation, preuves, discussions, réflexions, recherche, etc.
  - En équipe de 3 ou 4 personnes. Remettre un travail par équipe.
  - Date de remise : vendredi 1er mai 2009 à 17h à mon bureau ou par courriel.
    - Toute remise après 17h sera sanctionnée par une pénalité de 20% pour une réception avant minuit le vendredi et 40% si le travail est reçu avant le lundi suivant à 9h.
    - Tout travail remis après le lundi 4 mai 2009 à 9h recevra une note de 0.
- **Remarques supplémentaires**
  - Pour les questions à choix multiples, aucun point ne sera alloué (ni enlevé) pour une mauvaise réponse, ni pour le développement.
  - La note finale (en lettre, A+, A, etc.) pour le trimestre sera attribuée en fonction de l'atteinte des objectifs spécifiques à travers les trois évaluations (examen partiel, examen final et travail pratique). La distribution des résultats dans le groupe pourrait aussi être utilisée. Aucune autre opportunité (travail supplémentaire, etc.) d'augmenter le nombre de points ne sera allouée.
  - Seules les calculatrices acceptées par la Society of Actuaries seront admises pour les examens i.e. les modèles BA-35, BA II Plus, TI-30X, TI-30Xa, TI-30XIIS et TI-30XIIB.
- **Politique de reprise d'examen :** Par souci d'équité, aucune reprise d'examen ne sera permise, à moins de conditions exceptionnelles. La reprise d'examen n'est pas un droit mais un privilège, qui sera déterminé cas par cas.

- **Qualité du français écrit :** Il a été proposé en assemblée départementale que la qualité du français soit un critère d'évaluation dans les travaux. Par conséquent, un maximum de 15% des points pourront être retranchés de la note finale du travail pratique si la qualité du français est jugée inacceptable.
- **Plagiat, fraude et tricherie :** L'UQAM a récemment instauré une politique de « tolérance zéro » pour les infractions listées au Règlement # 18 (article 2). Par conséquent, toute infraction de ce type sera immédiatement sanctionnée (article 3).
    - Voir le texte ci-joint.

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.

Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante :

http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php

Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Bibliographie

- Boudreault, Mathieu (2009), ACT6220 – Mathématiques financières IV – Notes de cours (Référence obligatoire, distribuée sur le site web du cours)
- Boudreault, Mathieu (2004), Introduction à la programmation en S-Plus, Document de référence pour le cours ACT-21411, Université Laval (Distribué sur le site web du cours)
- Boudreault, Mathieu (2002), Introduction à Visual Basic pour Microsoft Excel (VBA), Document de référence pour le cours IFT-20403, Université Laval (Distribué sur le site web du cours)
- Goulet, Vincent (2007), Introduction à la programmation en S, (Distribué librement au http://cran.r-project.org/doc/contrib/Goulet_introduction_programmation_S.pdf)
- Hull, John C. (2007), *Options, futures and other derivatives*, 7^{e} édition, Prentice-Hall.
- McDonald, Robert L. (2005), *Derivatives markets*, 2^{e} édition, Addison-Wesley.

Équivalence des livres et notes de cours

Les chapitres des livres de référence sont présentés à titre indicatif seulement. La matière couverte en classe se limite souvent à quelques parties des chapitres mentionnés plus bas.

Partie 1 : Introduction aux produits dérivés		
Thèmes	**Hull**	**McDonald**
Marchés financiers	Chapitre 1	Chapitre 1
Contrats à terme	Chapitres 2 et 5	Chapitres 2, 5 et 6
Options	Chapitre 9	Chapitres 2 et 9
Taux d'intérêt	Chapitre 4	Chapitre 7
Swaps	Chapitre 7	Chapitre 8
Partie 2 : Évaluation de produits dérivés		
Thèmes	**Hull**	**McDonald**
Rappels de probabilité	n/d	n/d
Modèles de marché à temps discret*	Chapitre 11	Chapitres 10 et 11
Modèles de marché à temps continu*	Chapitres 12, 13, 15, 18, 19, et 24	Chapitres 12, 14, 18 à 22
Modèles de taux d'intérêt	Chapitres 30 et 31	Chapitre 24
Partie 3 : Éléments de gestion des risques		
Thèmes	**Hull**	**McDonald**
Réplication de produits dérivés	Chapitre 17	Chapitre 13
Réplication de titres à revenus fixes	Chapitre 4 et 6	Chapitre 7

* Incomplet dans les deux références recommandées

Calendrier

(à titre indicatif, sujet à changements)

Janvier							
D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**Sujets abordés**
4	5	6	7	**8**	9	10	Partie 1
11	12	13	14	15	16	17	Partie 1
18	19	20	21	22	23	24	Partie 1
25	26	27	28	29	30	31	Partie 2 (Discret)
Février							
D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**Sujets abordés**
1	2	3	4	5	6	7	Partie 2 (Discret)
8	9	10	11	12	13	14	Partie 2 (Discret)
15	16	17	18	19	20	21	Partie 2 (Discret)
22	23	24	25	26	27	28	Partie 2 (Continu)
Mars							
D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**Sujets abordés**
1	2	3	4	5	6	7	
8	**9**	10	11	**12**	13	14	Partie 2 (Continu)
15	16	17	18	19	20	21	Partie 2 (Continu)
22	23	24	25	26	27	28	Partie 2 (Continu)
Mars / **Avril** / Mai							
D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**Sujets abordés**
29	30	31	1	2	3	4	Partie 2 (Intérêt)
5	6	7	8	9	10	11	Partie 2 (Intérêt)
12	**13**	14	15	16	17	18	Partie 2 (Intérêt)
19	20	21	22	23	24	25	Partie 3
26	**27**	28	29	30	1	2	

Légende

Jour avec un cours
Semaine de lecture
Examen ou travail à remettre

Remarques

- 8 janvier 2009 : aucune séance de démonstration. 3 heures de cours
- 2 au 6 mars 2009 : semaine de lecture
- 9 mars 2009 : examen partiel
- 12 mars 2009 : date d'abandon de cours sans mention d'échec
- 13 avril 2009 : lundi de Pâques (aucun cours)
- 27 avril 2009 : examen final
- 1er mai 2009 : remise du travail pratique