UQÀM
Université du Québec à Montréal
Faculté des sciences
Département de mathématiques

ACT6220 : Mathématiques financières IV

Groupe 050 – Automne 2011

(Cours optionnel - 3 crédits)

Professeur : Mathieu Boudreault

Coordonnées : Département de mathématiques
Bureau : PK-5715
Téléphone : (514) 987-3000 [8560]
Courriel : boudreault.mathieu@uqam.ca
Site web : www.math.uqam.ca/~boudreault

Démonstrateur: Jean-Philippe Day-Michaud (day_michaud.jean-philippe@courrier.uqam.ca)

Cours préalables : ACT2320 (Mathématiques financières III)
MAT3071 (Processus stochastiques)

Horaire du cours : Vendredi 8h30 à 11h30 (Théorique) (9 septembre 2011 au 16 décembre 2011)
Vendredi 12h00 à 14h (Pratique) (9 septembre 2011 au 16 décembre 2011)

Disponibilités : Sur rendez-vous

Matériel obligatoire : Notes de cours et exercices (fournis sur le site Moodle du cours)

Références facultatives recommandée mais non obligatoire :

- *Options, futures and other derivatives*, 7^{e} édition de John C. Hull
  - Il s'agit de la référence la plus recommandée pour les professionnels de la finance;
  - Une version française est disponible (*Options, futures et autres actifs dérivés*, 6^{e} édition);
- *Derivatives Markets*, 2e édition de Robert L. McDonald
  - Référence officielle de l'examen MFE / 3F;
- *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets* par Cvitanic et Zapatero (voir bibliographie)
  - Alternative plus mathématique (mais bien dosée) au livre de Hull

Description du cours

Tiré du site web du registraire de l'UQAM :
« Ce cours vise à initier les étudiants aux concepts des produits dérivés, à leur évaluation et leur utilisation pour le financement des produits d'assurances et de retraite.
Options européennes, américaines et exotiques: Évaluation par le modèle binomial à plusieurs niveaux. Marché aléatoire et mouvement brownien. Dérivation du modèle de Black-Scholes. Approximation du modèle de Black-Scholes par le modèle binomial. Définition et évaluation des contrats à terme *futures* et *forward*. Structure des taux d'intérêt: Durée, convexité, immunisation. Gestion actif-passif. Modèles stochastiques de taux d'intérêt. Évaluation de produits dérivés par simulation. »

Préalables

- ACT2320 (Mathématiques financières III)
  - Cours préalable obligatoire;
  - L'étudiant doit connaître la terminologie des marchés financiers et des produits dérivés;
- MAT3071 (Processus stochastiques)
  - Cours préalable obligatoire;
  - L'étudiant doit être très familier avec les différents types de mouvements browniens tels que mouvements brownien standard, arithmétique et géométrique;
- Éléments de programmation
  - L'étudiant doit être à l'aise avec le tableur Microsoft Excel;
  - Idéalement, l'étudiant peut être familier avec VBA pour Excel, R, Matlab ou S-Plus;

Objectifs

Objectifs généraux
Ce cours a comme objectifs de préparer l'étudiant à:

1. Application des mathématiques financières aux problèmes concrets en finance et assurance;
2. Examen MFE de la Society of Actuaries / 3F de la Casualty Actuarial Society;
3. Susciter un intérêt pour les études avancées en mathématiques financières;

Objectifs spécifiques
Notez que certaines sections peuvent ne pas être abordées en classe suite à des contraintes de temps

1. Introduction aux produits dérivés
   a. Comprendre la différence entre l'évaluation d'un actif de base et d'un produit dérivé;
   b. Appliquer les notions d'arbitrage pour exploiter les opportunités qui se présentent;
   c. Utiliser la relation de parité entre les options d'achat et de vente européennes;
2. Modèles de marché à temps discret
   a. Bâtir un arbre binomial et trinomial à plusieurs périodes dans un contexte d'évaluation de produits dérivés;
   b. Comprendre les notions d'arbitrage et de complétude des marchés financiers dans un modèle à temps discret;

c. Bâtir un portefeuille de réplication pour reproduire les flux financiers d'un produit dérivé de type européen;
d. Utiliser l'évaluation neutre au risque pour calculer le prix d'un droit conditionnel;
e. Comprendre les implications du théorème fondamental de tarification des actifs financiers;
f. Faire le lien entre le portefeuille de réplication et l'évaluation neutre au risque dans le cadre du théorème fondamental;
g. Comprendre l'importance des martingales et des processus markoviens dans un contexte d'évaluation de produits dérivés;
h. À l'aide du modèle binomial, être en mesure de trouver le portefeuille de réplication d'un droit conditionnel européen à chaque période;
i. À l'aide du modèle binomial, être en mesure d'évaluer un droit conditionnel européen ou américain, sur un actif standard ou autre;
j. Comprendre les implications sur l'évaluation de produits dérivés d'ajouter la mortalité ou autres risques dans un produit d'assurance;

3. Modèle de Black-Scholes
   a. Comprendre et relier les mouvements browniens standard, arithmétique et géométrique (MBG);
   b. Calculer les différents moments et covariances d'un MBG;
   c. Simuler les différents types de mouvements brownien;
   d. Comprendre la notion de calcul stochastique et son importance en ingénierie financière;
   e. Comprendre le lien entre une équation différentielle stochastique (EDS) et une intégrale stochastique;
   f. Définir ce qu'est un processus d'Ito et appliquer le lemme d'Ito à des transformations simples;
   g. Simuler des processus d'Ito à l'aide des méthodes d'Euler et de Milstein;
   h. Trouver le portefeuille de réplication d'un droit conditionnel simple à l'aide de l'équation aux dérivées partielles (EDP);
   i. Utiliser l'évaluation neutre au risque pour calculer le prix d'un droit conditionnel;
   j. Appliquer le théorème de Girsanov et comprendre le changement de mesure martingale dans ce contexte;
   k. Comprendre les implications du théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers;
   l. Comprendre les implications du modèle et de la formule de Black-Scholes;
   m. Utiliser la formule de Black-Scholes dans la tarification d'options d'achat et de vente européennes;
   n. Utiliser la simulation pour évaluer des produits dérivés non conventionnels;
   o. Comprendre et expliquer pourquoi il est impossible en pratique de répliquer de façon parfaite un produit dérivé dans le modèle de Black-Scholes;
   p. Comprendre le lien entre les lettres grecques (*Greeks*) et l'EDP de Black-Scholes;
   q. Utiliser la simulation pour analyser les approches de couverture;

4. Techniques de réduction de variance
   a. Comprendre l'objectif des diverses techniques de réduction de variance :
      i. Variable antithétique;
      ii. Variable de contrôle;

iii. Échantillonnage stratifié;
iv. Échantillonnage stratégique;
v. Quasi Monte Carlo;

b. Appliquer, à l'aide d'Excel, les trois premières techniques de réduction de variance à des problèmes concrets de finance et d'assurance;

5. Modèles de taux d'intérêt aléatoires
   a. Différencier les types de taux d'intérêt et ce qu'on désire modéliser;
   b. Évaluer des flux financiers dans un contexte de taux d'intérêt aléatoire;
   c. Être capable d'utiliser la simulation pour analyser des stratégies de gestion des risques dans un régime de retraite;
   d. Modèles à temps discret
      i. Bâtir un arbre binomial de taux d'intérêt et l'utiliser dans l'évaluation de droits conditionnels;
      ii. Bâtir, calibrer un arbre de Black-Derman-Toy et l'utiliser dans l'évaluation de droits conditionnels;
   e. Modèles à temps continu
      i. Comprendre la construction du portefeuille réplicatif et de la mesure neutre au risque;
      ii. Relier les modèles de marché avec intérêt constant et intérêt aléatoire;
      iii. Différencier les différents modèles de taux d'intérêt et expliquer les avantages et inconvénients de chacun;
      iv. Simuler des trajectoires de taux d'intérêt et les utiliser dans un contexte de finance et d'assurance;

Évaluation

- L'évaluation du cours comporte trois éléments :
  - Examen partiel;
  - Examen final;
  - Travaux pratiques;
- Examen partiel (40%)
  - Examen à développement d'une durée de 3h;
  - Date : vendredi 28 octobre 2011 (9h à 12h);
- Examen final (40%)
  - Examen à développement d'une durée de 3h;
  - Date : vendredi 16 décembre 2011 (9h à 12h);
- Travaux pratiques (10% chacun)
  - Deux travaux à remettre au moment de chacun des examens;
  - Divers éléments : programmation, preuves, discussions, réflexions, recherche, etc.
  - En équipe de 2 à 4 personnes. Remettre un travail par équipe. Aucun travail individuel ne sera accepté.
  - Dates de remise
    - 1er travail : 28 octobre 2011 à 9h, à mon bureau ou par courriel.
    - 2e travail : 16 décembre 2011 à 9h, à mon bureau ou par courriel.
    - Aucun retard toléré. Tout travail remis après l'heure de tombée se verra attribuer une note de 0 (zéro).
- **Remarques supplémentaires**
  - Pour les questions à choix multiples, aucun point ne sera alloué (ni enlevé) pour une mauvaise réponse, ni pour le développement.
  - La note finale (en lettre, A+, A, etc.) pour le trimestre sera attribuée en fonction de l'atteinte des objectifs spécifiques à travers les trois évaluations (examen partiel, examen final et travail pratique). La distribution des résultats dans le groupe pourrait aussi être utilisée. Aucune autre opportunité (travail supplémentaire, etc.) d'augmenter le nombre de points ne sera allouée.
  - De plus, pour réussir le cours, il faudra atteindre la note minimale de passage en moyenne dans les deux examens;
  - Seules les calculatrices acceptées par la Society of Actuaries seront admises pour les examens i.e. les modèles BA-35, BA II Plus, TI-30X, TI-30Xa, TI-30XIIS et TI-30XIIB.
- **Politique de reprise d'examen :** Par souci d'équité, aucune reprise d'examen ne sera permise, à moins de conditions exceptionnelles. La reprise d'examen n'est pas un droit mais un privilège, qui sera déterminé cas par cas.

- **Qualité du français écrit :** Il a été proposé en assemblée départementale que la qualité du français soit un critère d'évaluation dans les travaux. Par conséquent, un maximum de 15% des points pourront être retranchés de la note finale du travail pratique si la qualité du français est jugée inacceptable.
- **Plagiat, fraude et tricherie :** L'UQAM a récemment instauré une politique de « tolérance zéro » pour les infractions listées au Règlement # 18 (article 2). Par conséquent, toute infraction de ce type sera immédiatement sanctionnée (article 3).
    - Voir le texte joint à la page suivante

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.
Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php
Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique

2.1 Infraction

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement.

2.2 Liste non limitative des infractions

Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer :

a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité;
b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen;
e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques;
f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne;
g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation;
i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Article 3 - Sanctions

3.1 L'attribution de la mention «P»

L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier.
Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes.

3.2 La mise en probation et autres sanctions

a) la *mise en probation;*
La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement.
La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée.
Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes :
b) l'échec au cours ou à l'activité créditée;
c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés;
d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs;
e) son expulsion définitive de l'Université.

Bibliographie

- Boudreault, Mathieu (2011), Introduction aux mathématiques de l'ingénierie financière (Référence obligatoire, distribuée sur le site web du cours)
- Boudreault, Mathieu (2004), Introduction à la programmation en S-Plus, Document de référence pour le cours ACT-21411, Université Laval (Distribué sur le site web du cours)
- Boudreault, Mathieu (2002), Introduction à Visual Basic pour Microsoft Excel (VBA), Document de référence pour le cours IFT-20403, Université Laval (Distribué sur le site web du cours)
- Cvitanic, J. et F. Zapatero (2004), Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets, MIT Press
- Goulet, Vincent (2007), Introduction à la programmation en S, (Distribué librement au http://cran.r-project.org/doc/contrib/Goulet_introduction_programmation_S.pdf)
- Hull, John C. (2007), *Options, futures and other derivatives*, 7^{e} édition, Prentice-Hall.
- McDonald, Robert L. (2005), *Derivatives markets*, 2^{e} édition, Addison-Wesley.

Calendrier

(à titre indicatif, sujet à changements)

Séance	Date	Contenu approximatif
# 1	2011-09-09	Introduction
# 2	2011-09-16	Arbre binomial à 1 et 2 périodes
# 3	2011-09-23	Généralisations de l'arbre binomial
# 4	2011-09-30	Arbre trinomial
# 5	2011-10-07	Mouvement brownien
# 6	2011-10-14	Introduction au calcul stochastique
# 7	2011-10-21	Solutions au modèle de Black-Scholes
# 8	**2011-10-28**	**Examen partiel (#1 à 6), remise du travail pratique # 1**
# 9	2011-11-04	Applications du modèle de Black-Scholes
# 10	2011-11-11	Réplication dans le modèle de Black-Scholes
# 11	2011-11-18	Techniques de réduction de variance
# 12	2011-11-25	Modèles binomiaux de taux d'intérêt
# 13	2011-12-02	Modèles de taux d'intérêt à temps continu
# 14	2011-12-09	**Congé de cours**
# 15	**2011-12-16**	**Examen final (#7, 9 à 13), remise du travail pratique # 2**