Université du Québec à Montréal
Faculté des sciences
Département de mathématiques

ACT5310 : Mathématiques de la finance actuarielle II

Groupe 020 – Hiver 2021

Chargé de cours : Tommy Thomassin

Coordonnées : Courriel : thomassin.tommy@uqam.ca

Démonstrateur: À venir

Cours préalables : ➔ ACT4310 Mathématiques de la finance actuarielle I
➔ ACT2100 Compléments de probabilité

Horaire du cours : Mardi 18h00 à 21h00 (Théorique) (14 janvier 2021 au 9 mai 2021)
Mardi 16h00 à 18h00 (Pratique) (14 janvier 2021 au 9 mai 2021)

Disponibilités : Sur rendez-vous

Matériel obligatoire : Notes de cours et exercices (fournis sur le site Moodle du cours)

Références facultatives recommandée, mais non obligatoire :

- *Options, futures and other derivatives*, 7^{e} édition de John C. Hull
  - Il s'agit de la référence la plus recommandée pour les professionnels de la finance;
  - Une version française est disponible (*Options, futures et autres actifs dérivés*, 6^{e} édition);
- *Derivatives Markets*, 2e édition de Robert L. McDonald
  - Référence officielle de l'examen MFE / 3F;
- *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets* par Cvitanic et Zapatero (voir bibliographie)
  - Alternative plus mathématique (mais bien dosée) au livre de Hull

Description du cours

Tiré du site web du registraire de l'UQAM :
« Approfondissement des mathématiques de l'évaluation et de la gestion de produits d'assurance et de passifs actuariels liés aux marchés financiers.
Modèles de finance actuarielle à temps continu; Applications du modèle de Black-Scholes aux produits d'assurance et passifs actuariels liés aux marchés financiers; Estimation, simulation et techniques de réduction de variance; Gestion des passifs actuariels dans le modèle de Black-Scholes; Modèles de taux d'intérêt à temps continu avec applications actuarielles. »

Préalables

- ACT2100 (Complément de probabilités)
  - Cours préalable obligatoire;
  - L'étudiant doit connaître les concepts clés des lois de probabilités;
- ACT4310 (Mathématiques de la finance actuarielle I)
  - Cours préalable obligatoire;
  - L'étudiant doit être très familier avec les concepts de produits dérivés et les modèles binomiaux;
- Éléments de programmation
  - L'étudiant doit être à l'aise avec le tableur Microsoft Excel;
  - Idéalement, l'étudiant peut être familier avec VBA pour Excel, R, Matlab ou S-Plus;

Objectifs

Objectifs généraux

Ce cours a comme objectifs de préparer l'étudiant à:

1. Application des mathématiques financières aux problèmes concrets en finance et assurance;
2. Examen IFM de la Society of Actuaries / 3F de la Casualty Actuarial Society;
3. Susciter un intérêt pour les études avancées en mathématiques financières;

Objectifs spécifiques

Notez que certaines sections peuvent ne pas être abordées en classe suite à des contraintes de temps

1. Introduction aux produits dérivés
   a. Comprendre la différence entre l'évaluation d'un actif de base et d'un produit dérivé;
   b. Appliquer les notions d'arbitrage pour exploiter les opportunités qui se présentent;
   c. Utiliser la relation de parité entre les options d'achat et de vente européennes;
2. Modèles de marché à temps discret
   a. Bâtir un arbre binomial et trinomial à plusieurs périodes dans un contexte d'évaluation de produits dérivés;
   b. Comprendre les notions d'arbitrage et de complétude des marchés financiers dans un modèle à temps discret;
   c. Bâtir un portefeuille de réplication pour reproduire les flux financiers d'un produit dérivé de type européen;
   d. Utiliser l'évaluation neutre au risque pour calculer le prix d'un droit conditionnel;

e. Comprendre les implications du théorème fondamental de tarification des actifs financiers;
f. Faire le lien entre le portefeuille de réplication et l'évaluation neutre au risque dans le cadre du théorème fondamental;
g. Comprendre l'importance des martingales et des processus markoviens dans un contexte d'évaluation de produits dérivés;
h. À l'aide du modèle binomial, être en mesure de trouver le portefeuille de réplication d'un droit conditionnel européen à chaque période;
i. À l'aide du modèle binomial, être en mesure d'évaluer un droit conditionnel européen ou américain, sur un actif standard ou autre;
j. Comprendre les implications sur l'évaluation de produits dérivés d'ajouter la mortalité ou autres risques dans un produit d'assurance;

3. Modèle de Black-Scholes
   a. Comprendre et relier les mouvements browniens standard, arithmétique et géométrique (MBG);
   b. Calculer les différents moments et covariances d'un MBG;
   c. Simuler les différents types de mouvements brownien;
   d. Comprendre la notion de calcul stochastique et son importance en ingénierie financière;
   e. Comprendre les différences entre l'intégration stochastique et l'intégration au sens de Riemann
   f. Calculer les différents moments d'une intégrale stochastique.
   g. Comprendre le lien entre une équation différentielle stochastique (EDS) et une intégrale stochastique;
   h. Définir ce qu'est un processus d'Ito et appliquer le lemme d'Ito à des transformations simples;
   i. Simuler des processus d'Ito à l'aide des méthodes d'Euler et de Milstein;
   j. Introduction aux Équations différentielles ordinaires (EDO) et Équations aux dérivés partielles (EDP)
   k. Trouver le portefeuille de réplication d'un droit conditionnel simple à l'aide de l'équation aux dérivées partielles (EDP);
   l. Utiliser l'évaluation neutre au risque pour calculer le prix d'un droit conditionnel;
   m. Changement de mesure de probabilité et application du théorème de Girsanov;
   n. Comprendre les implications du théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers;
   o. Comprendre les implications du modèle et de la formule de Black-Scholes;
   p. Utiliser la formule de Black-Scholes dans la tarification d'options d'achat et de vente européennes;
   q. Utiliser le modèle de Black-Scholes avec des produits d'annuité et d'assurance variable
   r. Comprendre le concept de volatilité implicite dans le modèle de Black-Scholes
   s. Utiliser la simulation pour évaluer des produits dérivés non conventionnels;
   t. Comprendre et expliquer pourquoi il est impossible en pratique de répliquer de façon parfaite un produit dérivé dans le modèle de Black-Scholes;
   u. Comprendre le lien entre les lettres grecques (*Greeks*) et l'EDP de Black-Scholes;
   v. Utiliser la simulation pour analyser les approches de couverture;

4. Techniques de réduction de variance

   a. Comprendre l'objectif des diverses techniques de réduction de variance :
      i. Variable antithétique;
      ii. Variable de contrôle;
      iii. Échantillonnage stratifié;
      iv. Échantillonnage stratégique;
      v. Quasi Monte Carlo;
   b. Appliquer, à l'aide d'Excel, les trois premières techniques de réduction de variance à des problèmes concrets de finance et d'assurance;
5. Modèles de taux d'intérêt aléatoires
   a. Différencier les types de taux d'intérêt et ce qu'on désire modéliser;
   b. Évaluer des flux financiers dans un contexte de taux d'intérêt aléatoire;
   c. Être capable d'utiliser la simulation pour analyser des stratégies de gestion des risques dans un régime de retraite;
   d. Modèles à temps discret
      i. Bâtir un arbre binomial de taux d'intérêt et l'utiliser dans l'évaluation de droits conditionnels;
      ii. Bâtir, calibrer un arbre de Black-Derman-Toy et l'utiliser dans l'évaluation de droits conditionnels;

Évaluation

- L'évaluation du cours comporte deux éléments :
  - Examen partiel;
  - Examen final;
- Examen partiel (50%)
  - Examen à développement d'une durée de 3h;
  - Date : mardi 9 mars 2021 (18h à 21h);
- Examen final (50%)
  - Examen à développement d'une durée de 3h;
  - Date : mardi 4 mai 2021 (18h à 21h);
- **Remarques supplémentaires**
  - Pour les questions à choix multiples, aucun point ne sera alloué (ni enlevé) pour une mauvaise réponse, ni pour le développement.
  - La note finale (en lettre, A+, A, etc.) pour le trimestre sera attribuée en fonction de l'atteinte des objectifs spécifiques à travers les trois évaluations (examen partiel, examen final et travail pratique). La distribution des résultats dans le groupe pourrait aussi être utilisée. Aucune autre opportunité (travail supplémentaire, etc.) d'augmenter le nombre de points ne sera allouée.
  - ***De plus, pour réussir le cours, il faudra atteindre la note minimale de passage en moyenne dans les deux examens;***
  - Seules les calculatrices acceptées par la Society of Actuaries seront admises pour les examens i.e. les modèles BA-35, BA II Plus, TI-30X, TI-30Xa, TI-30XIIS et TI-30XIIB.
- **Politique de reprise d'examen :** Par souci d'équité, aucune reprise d'examen ne sera permise, à moins de conditions exceptionnelles. La reprise d'examen n'est pas un droit mais un privilège, qui sera déterminé cas par cas.

- **Qualité du français écrit :** Il a été proposé en assemblée départementale que la qualité du français soit un critère d'évaluation dans les travaux. Par conséquent, un maximum de 15% des points pourront être retranchés de la note finale du travail pratique si la qualité du français est jugée inacceptable.
- **Plagiat, fraude et tricherie :** L'UQAM a récemment instauré une politique de « tolérance zéro » pour les infractions listées au Règlement # 18 (article 2). Par conséquent, toute infraction de ce type sera immédiatement sanctionnée (article 3).
    - Voir le texte joint à la page suivante

Programme d'agrément universitaire (PAU)

Ce cours est agréé en vertu du Programme d'agrément universitaire (PAU) de l'Institut canadien des actuaires (ICA) pour l'année académique 2018-2019.

L'ICA accordera aux étudiants qui obtiendront la note de B ou plus une partie de l'exemption de l'examen IFM/MFE menant à l'obtention des titres d'associé (AICA) et de Fellow (FICA) de l'ICA. Les détails se trouvent aux adresses suivantes: *

- Informations générales : http://www.cia-ica.ca/fr/adhesion/pau/informations-pour-les-%C3%A9tudiants
- Correspondances officielles pour l'UQAM : http://www.cia-ica.ca/fr/adhesion/pau/universites/uqam

L'étudiant qui demande une exemption par le PAU est également soumis au Code de conduite et d'éthique de l'ICA dont les détails se trouvent aux adresses suivantes: *

- Code de conduite et d'éthique : http://www.cia-ica.ca/docs/default-source/2014/214135f.pdf
- Politique relative à ce code : http://www.cia-ica.ca/docs/default-source/2014/214134f.pdf?sfvrsn=0

Pour toute question relative au Programme d'agrément universitaire, veuillez-vous adresser à l'Actuaire chargé de l'agrément à l'UQAM, Anne Mackay (mackay.anne@uqam.ca).

RESPECT DE L'INTÉGRITÉ ACADÉMIQUE

Face à l'importance et à l'ampleur du phénomène de la tricherie et du plagiat dans les universités, ici et à l'étranger, l'UQAM a amorcé, en janvier 2007, une démarche visant à promouvoir le respect de l'intégrité académique. Dans ce contexte et inspirée d'une philosophie de « tolérance zéro », la Commission des études de l'UQAM a modifié son Règlement sur les infractions de nature académique (R. 18) à sa réunion du 2 décembre 2008.
Endossant cette philosophie de « tolérance zéro » relativement aux actes de plagiat, de fraude et de tricherie, la Faculté des sciences de l'UQAM souhaite sensibiliser ses étudiants à l'importance du respect de l'intégrité académique. Puisqu'en sollicitant son admission à l'UQAM, toute candidate, tout candidat s'engage à suivre les politiques et règlements de l'Université, la Faculté souhaite informer ses étudiants des différents articles de ce règlement, des actes répréhensibles et des sanctions applicables. Un extrait de ces articles se trouve ci-dessous. Le Règlement complet et son application à la Faculté des sciences sont disponibles à l'adresse Web suivante : http://www.sciences.uqam.ca/decanat/reglements.php
Tous ces efforts visent à assurer la validité de la formation dispensée par la Faculté, ainsi qu'un traitement équitable de tous afin de maintenir la qualité de ses diplômes.

Article 2 - Infractions de nature académique

2.1 Infraction

Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie, falsification de document ou création d'un faux document commis par une candidate, un candidat, une étudiante, un étudiant de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen, d'un travail ou d'un stage faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constitue une infraction au sens de ce règlement.

2.2 Liste non limitative des infractions

Sans limiter la généralité de ce qui précède, constitue notamment une infraction le fait de poser ou tenter de poser l'un des actes suivants ou le fait d'y participer :

a) la substitution de personnes ou l'usurpation d'identité;
b) le plagiat : l'utilisation totale ou partielle du texte ou de la production d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence;
c) l'autoplagiat : le dépôt d'un travail pour fins d'évaluation alors que ce travail constitue essentiellement un travail qui a déjà été soumis pour fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant;
d) la possession ou l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen;
e) la possession ou l'utilisation de tout document ou matériel non autorisé préalablement, pendant un examen ou lors de la réalisation de travaux, incluant le recours aux outils informatiques ou moyens technologiques;
f) l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen ou de tout autre matériel provenant d'une autre personne;
g) l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle;
h) l'obtention d'une évaluation non méritée notamment par corruption, chantage, intimidation ou toute forme de harcèlement ou la tentative d'obtenir une telle évaluation;
i) la falsification d'un document ou la création d'un faux document, notamment d'un document transmis à l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances;
j) la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Article 3 - Sanctions

3.1 L'attribution de la mention «P»

L'étudiante, l'étudiant qui commet une infraction est mis en probation et peut se voir imposer une ou plusieurs sanctions. La mise en probation génère l'attribution de la mention «P» au dossier informatisé de l'étudiant, de l'étudiante. La mention «P» n'apparaît pas au relevé de notes de l'étudiante, l'étudiant mais figure en tout temps à son dossier.
Lorsque la sanction est la suspension, une mention à cet effet apparaîtra au relevé de notes pour la durée de la suspension. Dans le cas d'une expulsion définitive de l'Université, une mention à cet effet apparaîtra de manière permanente au relevé de notes.

3.2 La mise en probation et autres sanctions

a) la *mise en probation;*
La mise en probation constitue la reconnaissance que l'étudiante, l'étudiant a commis une infraction au présent règlement.
La mise en probation peut être imposée sans autre sanction, auquel cas, l'enseignant, l'enseignante se voit inviter à attribuer une notation à l'étudiante, l'étudiant pour le cours conformément au résultat obtenu pour les prestations complétées. La mise en probation sans autre sanction signifie que la mention «P» est inscrite au dossier de l'étudiante, l'étudiant et que celle, celui qui en est l'objet ne doit commettre aucune autre infraction au présent règlement, à défaut de quoi, l'une ou l'autre des sanctions suivantes lui sera imposée.
Outre la mise en probation, l'étudiante, l'étudiant peut se voir imposer une ou plusieurs des sanctions suivantes **:**
b) l'échec au cours ou à l'activité créditée;
c) l'obligation de réussir de trois à six crédits additionnels, hors programme, afin d'obtenir son grade, diplôme, certificat ou attestation; les cours doivent être identifiés;
d) la suspension de toute activité à l'Université, pour une période maximale de neuf trimestres consécutifs;
e) son expulsion définitive de l'Université.

Politique 16 sur le harcèlement sexuel
Le harcèlement sexuel se définit comme étant un comportement à connotation sexuelle unilatéral et non désiré ayant pour effet de compromettre le droit à des conditions de travail et d'études justes et raisonnables ou le droit à la dignité.
La Politique 16 identifie les comportements suivants comme du harcèlement sexuel : 1. Manifestations persistantes ou abusives d'un intérêt sexuel non désirées. 2. Remarques, commentaires, allusions, plaisanteries ou insultes persistants à caractère sexuel portant atteinte à un environnement propice au travail ou à l'étude. 3. Avances verbales ou propositions insistantes à caractère sexuel non désirées. 4. Avances physiques, attouchements, frôlements, pincements, baisers non désirés. 5. Promesses de récompense ou menaces de représailles, implicites ou explicites, représailles liées à l'acceptation ou au refus d'une demande d'ordre sexuel. 6. Actes de voyeurisme ou d'exhibitionnisme. 7. Manifestations de violence physique à caractère sexuel ou imposition d'une intimité sexuelle non voulue. 8. Toute autre manifestation à caractère sexuel offensante ou non désirée. Pour plus d'information : http://www.instances.uqam.ca/ReglementsPolitiquesDocuments/Documents/Politique_no_16.pdf Pour rencontrer une personne ou faire un signalement : Bureau d'intervention et de prévention en matière de harcèlement : 514-987-3000, poste 0886 http://www.harcelement.uqam.ca



Tout acte de plagiat, fraude, copiage, tricherie ou falsification de document commis par une étudiante, un étudiant, de même que toute participation à ces actes ou tentative de les commettre, à l'occasion d'un examen ou d'un travail faisant l'objet d'une évaluation ou dans toute autre circonstance, constituent une infraction au sens de ce règlement.

La liste non limitative des infractions est définie comme suit :

- la substitution de personnes ;
- l'utilisation totale ou partielle du texte d'autrui en le faisant passer pour sien ou sans indication de référence ;
- la transmission d'un travail aux fins d'évaluation alors qu'il constitue essentiellement un travail qui a déjà été transmis aux fins d'évaluation académique à l'Université ou dans une autre institution d'enseignement, sauf avec l'accord préalable de l'enseignante, l'enseignant ;
- l'obtention par vol, manœuvre ou corruption de questions ou de réponses d'examen ou de tout autre document ou matériel non autorisés, ou encore d'une évaluation non méritée ;
- la possession ou l'utilisation, avant ou pendant un examen, de tout document non autorisé ;
- l'utilisation pendant un examen de la copie d'examen d'une autre personne ;
- l'obtention de toute aide non autorisée, qu'elle soit collective ou individuelle ;
- la falsification d'un document, notamment d'un document transmis par l'Université ou d'un document de l'Université transmis ou non à une tierce personne, quelles que soient les circonstances ;
- la falsification de données de recherche dans un travail, notamment une thèse, un mémoire, un mémoire-création, un rapport de stage ou un rapport de recherche.

Les sanctions reliées à ces infractions sont précisées à l'article 3 du Règlement no 18

Vous pouvez consulter sur le site r18.uqam.ca des capsules vidéos qui vous en apprendront davantage sur l'intégrité académique et le R18, tout en vous orientant vers les ressources mises à votre disposition par l'UQAM pour vous aider à éliminer le plagiat de vos travaux.

Bibliographie

- Boudreault, Mathieu (2011), Introduction aux mathématiques de l'ingénierie financière (Référence obligatoire, distribuée sur le site web du cours)
- Boudreault, Mathieu (2004), Introduction à la programmation en S-Plus, Document de référence pour le cours ACT-21411, Université Laval (Distribué sur le site web du cours)
- Boudreault, Mathieu (2002), Introduction à Visual Basic pour Microsoft Excel (VBA), Document de référence pour le cours IFT-20403, Université Laval (Distribué sur le site web du cours)
- Cvitanic, J. et F. Zapatero (2004), Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets, MIT Press
  Disponibilité bibliothèque
- Goulet, Vincent (2007), Introduction à la programmation en S, (Distribué librement au http://cran.r-project.org/doc/contrib/Goulet_introduction_programmation_S.pdf)
- Hull, John C. (2007), *Options, futures and other derivatives*, 7e édition, Prentice-Hall.
  Disponibilité bibliothèque
- McDonald, Robert L. (2005), *Derivatives markets*, 2e édition, Addison-Wesley.
  Disponibilité bibliothèque

Calendrier

(à titre indicatif, sujet à changements)

Séance	Date	Contenu approximatif
# 1	2021-01-19	Introduction
# 2	2021-01-26	Arbre binomial à 1 et 2 périodes
# 3	2021-02-02	Généralisations de l'arbre binomial
# 4	2021-02-09	Arbre trinomial
# 5	2021-02-16	Mouvement brownien
# 6	2021-02-23	Introduction au calcul stochastique
# 7	2021-03-02	Congé (semaine de relâche)
# 8	**2021-03-09**	**Examen intra (#1 à 6)**
# 9	2021-03-16	Solutions au modèle de Black-Scholes
# 10	2021-03-23	Applications du modèle de Black-Scholes (partie 1)
# 11	2021-03-30	Applications du modèle de Black-Scholes (partie 2)
# 12	2021-04-06	Réplication dans le modèle de Black-Scholes
# 13	2021-04-13	Techniques de réduction de variance
# 14	2021-04-20	Modèles binomiaux de taux d'intérêt
# 15	2021-04-27	Période de révision
# 16	**2021-05-04**	**Examen final (#9 à 15)**