Plan et modalités du cours

MAT995Q – Séminaire de combinatoire : Combinatoire algébrique et géométrique de Coxeter

Pr. Christophe Hohlweg – Hiver 2025 - UQAM

Les groupes de Coxeter joue un rôle fondamental dans plusieurs domaines des mathématiques : ils apparaissent comme groupes de Weyl en théorie de Lie, en théorie de Kazhdan-Lusztig, pour les algèbres amassées ou en géométrie algébrique; ils sont les groupes discrets de réflexions agissant sur les espaces à courbure constante en géométrie et sont primordiales dans la définition des immeubles. L'étude des groupes de Coxeter sont souvent la clef afin de comprendre les structures qui leurs sont associés.
Nous commencerons par couvrir les propriétés de base de ces groupes : conditions d'échange/réduction, théorème de Matsumoto, représentations géométriques et systèmes de racines. Nous utiliserons alors cette théorie pour montrer que tout groupe discret engendré par des réflexions dans un espace euclidien ou hyperbolique est un groupe de Coxeter.
Nous discuterons ensuite les liens entre les systèmes de racines, l'ordre faible, l'ordre de Bruhat et le graphe de Cayley munit de sa métrique géodésique. On conclura cette partie par montrer que tout groupe de Coxeter est automatique.
La dernière partie du cours sera dédié à des développements récents de la recherche sur le sujet. En particulier, on mettra en lumière les structures d'ombres de Garside, d'arrangements de Shi et leurs liens avec la récente preuve de la biautomaticité des groupes de Coxeter et le problème des mots dans les groupes d'Artin-Tits.

Bibliographie

Livres

- A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Graduate texts in Mathematics 231, Springer (2005)
- P. Abramenko and K. S. Brown, Buildings: Theory and Applications. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 248. Springer, New York, (2008).
- J. E. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge studies in advances mathematics 29, Cambridge University press (1990)

Articles

- M. Dyer, C. Hohlweg, Small roots, low elements, and the weak order in Coxeter groups, Advances in Math. 301 (2016), 739-784.
- M. Dyer, S. Fishel, C. Hohlweg, A. Mark, Shi arrangements and low elements in Coxeter groups, arXiv:2303.16569 (2023).

Plus

- M. W. Davis, The Geometry and Topology of Coxeter Groups, London Mathematical Society Monographs (2008)
- J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds, 2nd edition, Graduat text in math. 149 (2006) – Chapters 6 & 7
- E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, Discrete groups of Motions of Spaces of Constant Curvature, in Geometry II: **Spaces of Constant Curvature**, 139-248, (1993).
- P. Dehornoy, M. Dyer and C. Hohlweg, Garside families in Artin-Tits monoids and low elements in Coxeter groups, Comptes Rendus Mathematique, 353, 403-408 (2015).
- C. Hohlweg, P. Nadeau, N. Williams, Automata, reduced words, and Garside shadows in Coxeter groups, Journal of algebra, vol. 457 (2016), 431-456.
- D. Osajda, P. Przytyki, Coxeter groups are bi-automatic, arXiv:2206.07804 (2022)

Modalités d'évaluation

- **Devoir (2 avril):** Une liste de (nombre d'étudiant.e.s) problèmes à résoudre (seul.e ou en groupe) sera distribuée le 27 février. Chaque étudiant.e choisira alors un problème dont il/elle rédigera la solution; la solution d'un même problème ne peut pas être rédigée par deux étudiant.e.s distinct.e.s. ***La solution du devoir devra être rédigée sous \Latex dans la class amsart.*** Le PDF peut-être remis au lieu d'une copie papier.
- **Un exposé de 50 minutes (23 avril+)** en classe basé sur la présentation d' un sujet en lien avec les groupes de Coxeter (articles de recherches, survol de chapitres de livre, par exemple); à choisir avec le professeur vers la mi mars au plus tard. À partir de mi-mars, des rencontres de suivi seront organisées entre le professeur et les étudiant.e.s.