17 JUILLET 2026 PAR CHRISTOPHE HOHLWEG

MAT995Q – Combinatoire algébrique et géométrique des groupes de Coxeter / Geometric and algebraic combinatorics of Coxeter groups

UQAM, Automne/Fall 2026 – Lundis/Mondays 9h à 12h au **PK4323 (Salle de séminaire LACIM)**

Ce cours est un cours ISM (Institut des sciences mathématiques)

La page de l'UQAM pour le MAT995Q

Le plan et les modalités du cours se trouvent en bas de page. Syllabus below

Cours	Contenu/content (mis à jour chaque semaine/updated weekly)
Lundi 14 septembre	Introduction; definitions of Coxeter systems and groups, Coxeter matrices, Coxeter graphs. All discrete reflection groups on spherical, Euclidean and hyperbolic spaces are Coxeter groups (Coxeter and Vinberg's theorem). See also Intro. to Coxeter groups (CIME school 2026)
Lundi 21 septembre	
Lundi 28 septembre	
Lundi 5 octobre	**Pas de cours : élection provinciale/no class: provincial election**
Lundi 12 octobre	**Semaine de relâche/Reading week**
Lundi 19 octobre	*Cours en ligne/course online (ZOOM)*
Lundi 26 octobre	
Lundi 2 novembre	
Lundi 9 novembre	
Lundi 16 novembre	
Lundi 23 novembre	Devoir à rendre / Assignment to hand in
Lundi 30 novembre	
Lundi 7 décembre	Exposés par les étudiants/Talks by students
Lundi 14 décembre	Exposés par les étudiants/Talks by students
Lundi 21 décembre	Exposés par les étudiants/Talks by students (if necessary)

Plan et modalités du cours/Syllabus

MAT995Q – Séminaire de combinatoire : Combinatoire algébrique et géométrique de Coxeter (English follows)

Les groupes de Coxeter joue un rôle fondamental dans plusieurs domaines des mathématiques : ils apparaissent comme groupes de Weyl en théorie de Lie, en

théorie de Kazhdan-Lusztig, pour les algèbres amassées ou en géométrie algébrique; ils sont les groupes discrets de réflexions agissant sur les espaces à courbure constante en géométrie et sont primordiales dans la définition des immeubles. L'étude des groupes de Coxeter sont souvent la clef afin de comprendre les structures qui leurs sont associés.

Nous commencerons par couvrir les propriétés de base de ces groupes : conditions d'échange/réduction, théorème de Matsumoto, représentations géométriques et systèmes de racines. Nous utiliserons alors cette théorie pour montrer que tout groupe discret engendré par des réflexions dans un espace euclidien ou hyperbolique est un groupe de Coxeter.

Nous discuterons ensuite les liens entre les systèmes de racines, l'ordre faible, l'ordre de Bruhat et le graphe de Cayley munit de sa métrique géodésique.

La dernière partie du cours sera dédié à des développements récents de la recherche sur le sujet. En particulier, on mettra en expliquera le lien entre arrangements de Shi et la preuve de la biautomaticité des groupes de Coxeter (théorème de Osajda et Przytycki).

MAT995Q – Algebraic and geometric combinatorics of Coxeter groups

Coxeter groups play a fundamental role in several areas of mathematics: they occur as Weyl groups in Lie theory, Kazhdan-Lusztig theory, for Cluster algebras or in algebraic geometry; they are the discrete reflection groups acting on spaces of constant curvature in geometry and they are fundamental to define buildings in geometric group theory. Properties of these groups are often key to a deep understanding of the main relevant structures for these areas.

We will start by covering the basics of Coxeter group theory: exchange/deletion conditions, Matsumoto theorem, geometric representations and root systems. We will apply the theory to show that any discrete group generated by reflections in spherical, Euclidean or hyperbolic geometry is a Coxeter group.

Then we will be discussing the interplay between root systems, the weak order, the Bruhat order and the Cayley graph with its word-metric. We will end this part by showing that Coxeter groups are automatic (Brink-Howlett theorem).

The final part of this class will be dedicated to current research developments. In particular, we will be focusing our attention on Shi arrangements and their relation to the proof of the bi-automaticity of Coxeter groups (Osajda-Przytycki theorem).

The final part of this class will be dedicated to current research developments. In particular, we will be focusing our attention on Garside shadows, Shi arrangements and their relationship with the (still open) word problem in Artin-Tits (braid) groups and the bi-automaticity of Coxeter groups.

Système de racines projectifs/Some projective root systems

Bibliographie/Bibliography

1. (Book) A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups (**mainly Chapter 1,3,4**, see also chap. 2), Graduate texts in Mathematics 231, Springer (2005)
2. (Book) J. E. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups (**mainly Chap 5 and 6**; see also 1-4), Cambridge studies in advances mathematics 29, Cambridge University press (1990)
3. M. Dyer, S. Fishel, C. Hohlweg, A. Mark, Shi arrangements and low elements in Coxeter groups, arXiv:2303.16569 (2023).
4. D. Osajda, P. Przytyki, Coxeter groups are bi-automatic, *Inventiones mathematicae* 242 (2025), 627-637.
5. F. Dos Santos, Garside shadows and biautomatic structures in Coxeter groups arXiv:2505.21718 (2025)
6. F. Dos Santos, C. Hohlweg, A. Trufanov, Weak order on groups generated by involutions arXiv:2604.18822 (2026)

Plus/more

- P. Dehornoy, M. Dyer and C. Hohlweg, Garside families in Artin-Tits monoids and low elements in Coxeter groups, Comptes Rendus Mathematique, 353, 403-408 (2015).
- C. Hohlweg, P. Nadeau, N. Williams, Automata, reduced words, and Garside shadows in Coxeter groups, Journal of algebra, vol. 457 (2016), 431-456.
- (Book) P. Abramenko and K. S. Brown, Buildings: Theory and Applications. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 248. Springer, New York, (2008).
- (Book) M. W. Davis, The Geometry and Topology of Coxeter Groups, London Mathematical Society Monographs (2008)
- (Book) J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds, 2nd edition, Graduat text in math. 149 (2006) – Chapters 6 & 7
- (Book) E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, Discrete groups of Motions of Spaces of Constant Curvature, in Geometry II: **Spaces of Constant Curvature**, 139-248, (1993).

Modalités d'évaluation/Evaluations

- **Devoir (23 novembre, 50%):** Une liste de (nombre d'étudiant.e.s) problèmes à résoudre (seul.e ou en groupe) sera distribuée le 23 novembre. Chaque étudiant.e choisira alors un problème dont il/elle rédigera la solution; la solution d'un même problème ne peut pas être rédigée par deux étudiant.e.s distinct.e.s. ***La solution du devoir devra être rédigée sous Latex dans la class amsart.*** Le PDF peut-être remis au lieu d'une copie papier.
- **Un exposé de 35 minutes (7 décembre+, 50%)** en classe basé sur la présentation d' un sujet en lien avec les groupes de Coxeter (articles de recherches, survol de chapitres de livre, par exemple); à choisir avec le professeur vers la mi mars au plus tard. À partir de mi-mars, des rencontres de suivi seront organisées entre le professeur et les étudiant.e.s.

- **Homework (November 23, 50%):** A list of (number of students) problems to solve (individually or in groups) will be distributed on November 23. Each student will then choose one problem for which they will write the solution; the solution to the same problem cannot be written by two different students. **The homework solution must be written in Latex using the *amsart* class**. The PDF may be submitted instead of a

paper copy.
- **A 35-minute presentation (December 7 and onwards, 50%)** in class, based on a topic related to Coxeter groups (e.g., research articles, an overview of book chapters); the topic must be chosen in consultation with the professor no later than mid-March. Starting mid-march, follow-up meetings will be organized between the professor and the students.

COXETER GROUPS, GROUPES DE COXETER, MAT9XXX

COXETER GROUPS