UQAM, Département de mathématiques,
Hiver 2024, Vestislav Apostolov, PK 5240
apostolov.vestislav@uqam.ca

Séminaire de géométrie différentielle et topologie: Géométrie kählérienne des variétés toriques

Session: Hiver 2024

Horaire: ME, 9:00-12:00, PK-R210.

Site-web du cours: `http://profmath.uqam.ca/~apostolo/MAT993U.html`

But: Le cours s'adresse aux étudiant(e)s interessé(e)s à la géométrie différentielle (complexe et symplectique) et l'analyse globale (EDP géométriques).

Prérequis: Cours de géométrie différentielle des variétés.

Resumé: Ce cours a un double objectif. Dans un premier temps, nous introduirons la notion de variété torique, de deux points de vue complémentaires : le point de vue de la géométrie symplectique et les actions hamiltoniennes (la théorie de Delzant) et le point de vue de la géométrie algébrique complexe (la théorie des polytopes entiers et les éventails). Dans une deuxième partie du cours, nous nous spécialiserons dans l'étude de la géométrie riemannienne des variétés toriques et décrirons les métriques riemanniennes compatibles en termes de fonctions convexes lisses sur le polytope de Delzant correspondant (la théorie d'Abreu-Guillemin). Ceci nous conduira à notre objectif final qui est de présenter la résolution récente (obtenue par Chen-Cheng en 2021) de la conjecture de Yau-Tian-Donaldson, donnant une condition nécessaire et suffisante, exprimée en termes du polytope de Delzant correspondant, pour qu'une variété torique admette une métrique riemannienne compatible de courbure scalaire constante.

Abstract: The purpose of this graduate course is to two-fold. In the first part of the course, we will introduce and study the notion of a (compact, smooth) toric manifold from two complementary points of view: the point of view of symplectic geometry and Hamiltonian actions (the Delzant theory) and the point of view of complex algebraic geometry (the theory of lattice polytopes and fans). In the second part of the course, we will specalize to the study of riemannian geometry of toric manifolds and describe the compatible riemannian metrics in terms of smooth convex functions on the corresponding Delzant polytope (the Abreu-Guillemin theory). This will lead

us to our main objective which is a gentle introduction to the recent resolution of the Yau-Tian-Donaldson conjecture (obtained by Chen-Cheng in 2021) giving a necessary and sufficient condition, expressed in terms of the corresponding Delzant polytope, for a compact smooth toric manifold to admit a compatible riemannian metric of constant scalar curvature. The only prerequisite required is a first course in differential geometry on manifolds.

Plan: Nous allons couvrir et développer davantage le matériel des notes du CIRM mini-cours « *The Kähler geometry of toric manifolds* » donné en 2019 par le professeur.

Références:

Books

1. M. Audin, *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math. **93**, Birkhäuser, 1991.
2. D. Cox, J. Little and H. Schenk, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Math., AMS, 2011.
3. V. Guillemin, *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, Progress in Math. **122**, Birkhäuser, 1994.
4. P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
5. D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Science Publications, 1998.
6. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Founbdations of Differential Geometry*, Vol. I and II, Wiley &b Sons 1996.
7. F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Grad. Texts Math. Springer, 1971.

Lecture notes

1. V. Apostolov, *The Kähler geometry of toric manifolds*, available at arXiv:2208.12493.
2. Ana Cannas da Silva, *Symplectic Toric Manifolds*, available online.

Évaluation: Chaque étudiant doit rédiger et présenter oralement un sujet spécial, choisi avec le professeur, à la fin de cours. La note finale sera composée à partit de sa participation au cours (40%) et la qualité de sa présentation du sujet choisi (60%).