MAT 9231– GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

Professeur : Vestislav Apostolov
e-mail : apostolov.vestislav@uqam.ca

Session : Hiver 2026

Heures de cours :
Jeudi : 9h00-12h00,

Évaluation : La note finale sera calculée comme suit :

1) 60 % pour l'ensemble des 2 devoirs ;
2) 40 % pour un travail de session donnant lieu à un exposé e 50 minutes sur des sujets spéciaux reliés au cours.

PLAN DE COURS

1. **Préliminaires :** Éléments de géométrie différentielle : variétés différentiables, l'espace tangent ; champs de vecteurs, formes différentielles ; tenseurs ; revêtements, quotients, fibrations, fibrés vectoriels.

2. **Métriques riemanniennes :** Existence et premiers exemples : la sphère, l'espace euclidien plat, l'espace hyperbolique réel. La longueur comme invariant riemannien : connexion riemannienne et géodésiques ; espace complets ; théorème the Hopf-Rinow ; cut-locus ; exemples.

3. **Courbure** : Le tenseur de la courbure ; courbure de Ricci et courbure scalaire ; courbure sectionnelle ; courbure de Weyl ; espaces localement plats ; théorèmes de Weyl et Kuiper. Métriques d'Einstein. La première et la deuxième variation d'un arc minimisant ; champs de Jacobi et l'application exponentielle ; variétés à courbure sectionnelle constante. La courbure et la topologie : théorèmes de Myers, Synge, Hadamar—Cartan. Énoncés des résultats sur la courbure et la topologie.

4. **Analyse sur des variétés riemanniennes** : La théorie de Hodge : formes harmoniques et la méthode de Bochner. Géométrie spectrale élémentaire. Le principe de minimax. Le problème de Yamabe et le théorème d'Aubin-Shoen.

5. **Introduction aux groupes d'holonomie riemannienne :** Groupe d'holonomie d'une connexion affine ; relation entre le groupe d'holonomie et la courbure ; variétés riemanniennes reductibles et le théorème de decomposition de deRham ; classification de Berger des groupes d'holonomie riemannienne.

Références : Les notes seront en principe suffisantes. Il y a une immense littérature sur le sujet. On pourra par exemple consulter les livres suivants :

1. S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag.
2. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag.
3. S. Kobayshi and Numizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I,II, Interscience Pub.
4. M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, LNM 194, Springer-Verlag.
5. A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer Verlag.
6. T. Aubin, *Non-linear Analysis on Manifolds. Monge Ampère Equations.*, Springer-Verlag.
7. S. Salamon, *Riemanniann Geometry and Holonomy Groups*, Pitman Res. Notes in Math., Longman 1989.