**Mat 2150 : Analyse II**
**Professeur :** Olivier Collin, Bureau : PK-5340, Courriel : collin.olivier@uqam.ca
**Horaire :** Mardi 11h-12h30, Mercredi 9h-10h30 et 10h30-12h30 (TP)
**Heures de disponibilité :** Avant ou après le cours du mardi, ou rendez-vous *Zoom* à une heure convenable.

**Objectifs du cours :** Le but de ce cours est de poursuivre la formation de base d'Analyse réelle en une variable. On y développe trois aspects distincts mais intimement liés. Après quelques rappels des principales notions vues en *Analyse I*, nous étudierons en détail la notion de convergence uniforme des suites et séries de fonctions. S'en suivra une étude détaillée de l'intégration des fonctions réelles : nous survolerons rapidement les principales propriétés de l'intégrale de Riemann pour nous concentrer sur la construction de l'intégrale de Lebesgue via les fonctions escalier sans la notion de mesure extérieure. Ceci nous occupera pendant une grande partie du cours. Pour conclure, nous aborderons certains éléments de l'Analyse de Fourier, selon le temps disponible.

**Pré-requis :** MAT1130 *Analyse I*. Pouvoir comprendre des arguments de type "$\epsilon - \delta$" et avoir une certaine familiarité avec les notions de convergence des suites et séries réelles, ainsi que certaines propriétés de base des fonctions continues et dérivables.

**Avertissement (Intelligence artificielle) :** Les progrès de l'IA en mathématiques sont fulgurants et ceci entrainera une remise en question drastique de la façon de faire et d'enseigner les mathématiques. Entre temps, un avertissement est de mise : si vous demandez constamment les solutions à ChatGPT, Claude, Gemini, Deepseek, Grok, etc, vous n'apprendrez rien d'autre que des définitions et des enchaînements logiques exposés en classe par le professeur. Ce n'est pas suffisant pour tirer profit de ce cours dans la suite de vos études puis votre carrière.
Deux options s'offrent à vous à mon avis. La première est de travailler des problèmes sans IA en vous rappelant qu'une solution complète n'est que l'aboutissement de plusieurs tentatives infructueuses mais acharnées. Dans les mots de l'écrivain Samuel Beckett,

"*Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better.*"

La seconde option est de demander une solution à l'IA mais de vous assurer que vous comprenez parfaitement l'enchaînement logique de la solution à partir des notions couvertes dans le cours, ce qui inclus détecter les erreurs possiblement commises par le logiciel, une tâche qui peut être plus difficile que simplement trouver une solution par soi-même.

**Plan de cours :**

**Chapitre I : Convergence uniforme et séries de puissance**

- I.1 Rappels de quelques notions importantes du cours *Analyse I.*
- I.2 Introduction à l'intégration (approche axiomatique).
- I.3 Convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions, dérivation et intégration.
- I.4 Convergence uniforme des séries de fonctions, séries de puissance.
- I.5 Approximation uniforme des fonctions continues, Théorème de Weierstrass.

**Chapitre II : Théorie de l'intégration des fonctions réelles**

- II.1 Rappels et propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann.
- II.2 Suites de fonctions escalier et intégration des fonctions continues.
- II.3 Construction de l'intégrale de Lebesgue selon Riesz et Nagy. L'espace $L^1$.
- II.4 Propriétés élémentaires de l'intégrale de Lebesgue.
- II.5 Les théorèmes de convergence (monotone, dominée, Fatou, etc).
- II.6 Un aperçu de l'intégration dans $\mathbb{R}^n$.

**Chapitre III : Espaces $L^p$ et séries de Fourier**

- III.1 $L^p$ comme espace métrique complet.
- III.2 Géométrie de l'espace vectoriel $L^2$, systèmes orthogonaux.
- III.3 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier.

**Ouvrages de référence :** Le cours sera articulé autour de divers textes, si bien qu'il n'y a pas de manuel obligatoire à se procurer. Je vous encourage à explorer par vous-même diverses références. Une seule mise en garde s'impose : plusieurs ouvrages traitant de l'intégrale de Lebesgue développent dans un premier temps la notion de mesure de Lebesgue, ce qui rend la théorie plus lourde et moins facilement accessible au premier cycle.
Voici quelques ouvrages complémentaires au cours qui pourront être utiles :
H. Priesley, *Introduction to integration*, Claredon Press (1997)
A. Weir, *Lebesgue integration and measure*, Cambridge University Press (1973)
A. Gramain, *Intégration*, Hermann (1988)
M. Spivak, *Calculus*, Cambridge University Press (2006)
W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill (1976)
T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration*, Chelsea (2001)
T. Körner, em Fourier Analysis, Cambridge University Press (1993)
S. Lang, *Undergraduate analysis*, Springer (1997)
J. Jost, *Postmodern analysis*, Universitext Springer (1998)

**Evaluation proposée :** Présence et participation régulière au cours (10%), 2 quiz (10%), 2 devoirs (10%), 2 examens (70% selon la formule Max = 45% et Min = 25%)