Algèbre linéaire 3

Christophe Reutenauer
Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

29 décembre 2020

Table des matières

1 Contenu selon l'UQAM

(Réduction des endomorphismes : L'algèbre End(V), décomposition d'un opérateur en sous-espaces caractéristiques, sous-espaces stables, nilpotence, forme normale de Jordan, décomposition de Dunford : voir algèbre linéaire 2)

Compléments sur les espaces vectoriels : espaces dual et bidual, bases duales, annulateur d'un sous-espace, notion d'isomorphisme canonique, applications duales. Algèbres tensorielle et extérieure. Espaces hermitiens, complexification d'un espace et d'un opérateur, notion d'opérateur adjoint, théorèmes spectraux pour les opérateurs auto-adjoints, décomposition polaire d'un opérateur inversible. Sujets complémentaires au choix : Introduction à la théorie des modules, à la théorie des représentations ou modules sur un anneau principal.

2 Introduction

Ce cours fait suite au cours d'algèbre linéaire 1 et 2, dont on pourra lire les notes [1, 2]. Nous notons $\mathbb{K}$ un corps commutatif, comme par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier.

Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E vers F.

3 Dualité

3.1 Formes linéaires, espace dual d'un espace vectoriel

Définition 3.1. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une* forme linéaire *sur V est une appplication linéaire de V vers $\mathbb{K}$. Le* dual *de V est l'espace vectoriel des formes linéaires sur V. Il est noté V^*.*

Donc $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$.

Définition 3.2. *1. Soit E un sous-espace d'un espace vectoriel V. La* codimension *de E est la dimension de l'espace quotient V/E.*

2. Un hyperplan *est un sous-espace de codimension 1.*

Pour mieux comprendre la notion de codimension, on peut prouver la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit E un sous-espace d'un espace vectoriel V de dimension finie. La codimension de E est égale à $\dim(V) - \dim(E)$.*

Démonstration. Cela découle de la preuve du théorème 9.2 dans [2]. □

La proposition suivante indique l'aspect géométrique des formes linéaires.

Proposition 3.2. *Les hyperplans de l'espace vectoriel V sont les noyaux des formes linéaires non nulles.*

Démonstration. Soit $H = \mathrm{Ker}(\phi)$ où ϕ est une forme linéaire non nulle. L'application linéaire $\phi : V \to \mathbb{K}$ est surjective, car son image I est un sous-espace non nul de l'espace vectoriel $\mathbb{K}$, lequel est de dimension 1, donc $I = \mathbb{K}$.

Par la propriété universelle (Corollaire 9.1 [2]), l'espace quotient V/H est isomorphe à $\mathbb{K}$. Donc la codimension de H est 1, et H est un hyperplan.

Soit H un hyperplan. Alors V/H et $\mathbb{K}$ ont même dimension ; ils sont donc isomorphes ([1] Corollaire 7.6). Il existe donc un isomorphisme $\psi : V/H \to \mathbb{K}$. Soit $\pi : V \to V/H$ la projection canonique. Alors le noyau de la forme linéaire $\psi \circ \pi : V \to \mathbb{K}$ est $(\psi \circ \pi)^{-1}(0) = \pi^{-1}(\psi^{-1}(0)) = \pi^{-1}(0) = H$, ce qui prouve la réciproque. $\square$

Exercice 3.1. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E l'espace vectoriel des applications linéaires de K vers V. Montrer que la fonction $E \to V$, $f \mapsto f(1)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Exercice 3.2. *Soient E, F des espaces vectoriels et de bases respectives $e_1, \dots, e_n$ et $f_1, \dots, f_p$. On définit pour chaque $i = 1, \dots, n$ et $j = 1 \dots, p$, une application linéaire $\phi_{ij} : E \to F$ par la condition que $\forall k = 1, \dots, n$, $\phi_{ij}(e_k) = \delta_{ik} f_j$. Montrer que ces np applications linéaires forment une base de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Exercice 3.3. *Soit φ, ψ deux formes linéaires non nulles sur V telle que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, non nul, tel que $\varphi = \alpha\psi$ (compléter une base de l'hyperplan $\mathrm{Ker}(\varphi)$ en une base de V). En déduire que les hyperplans de V sont en bijection avec les droites de V^*.*

3.2 Bases duales

Rappelons que si $e_1, \dots, e_n$ est une base de l'espace vectoriel E et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel V, alors il existe une unique application linéaire $E \to V$ qui envoie chaque e_i sur v_i ([1] Corollaire 7.1). On en déduit la première assertion du

Théorème 3.1. *Soit E un espace de dimension finie n avec base $e_1, \dots, e_n$. Il existe pour tout $i = 1, \dots, n$ une forme linéaire sur E, notée e_i^*, telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Alors $e_1^*, \dots, e_n^*$ est une base de l'espace dual E^*.*

On l'appelle la *base duale* de la base $e_1, \dots, e_n$.

Corollaire 3.1. *Si E est de dimension finie,* $\dim(E) = \dim(E^*)$.

Preuve du théorème 3.1. Montrons d'abord que les e_i^* sont linéairement indépendants. Supposons que $\sum_i a_i e_i^* = 0$ ($a_i \in \mathbb{K}$). Appliquons les deux côtés à e_j : $0 = (\sum_i a_i e_i^*)(e_j) = \sum_i a_i e_i^*(e_j) = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j$. Donc tous les coefficients a_i sont nuls.

Montrons maintenant qu'ils engendrent E^*. Soit $\varphi \in E^*$. Vérifions que

$$\varphi = \sum_i \varphi(e_i)e_i^*. \tag{1}$$

Il suffit de vérifier que les deux côtés sont égaux quand on les applique à chaque e_j. Mais on a $(\sum_i \varphi(e_i)e_i^*)(e_j) = \sum_i \varphi(e_i)e_i^*(e_j) = \sum_i \varphi(e_i)\delta_{ij} = \varphi(e_j)$, ce qui finit la preuve. □

Si e est un vecteur dans E, on peut écrire $e = \sum_i x_i e_i$, avec des x_i dans $\mathbb{K}$. Alors

$$x_i = e_i^*(e).$$

On peut appeler x_i la i-ème *coordonnée* de e dans la base $e_1, \ldots, e_n$. On a en fait

$$x_i = e_i^*(e).$$

Donc e_i^* est la fonction $E \to \mathbb{K}$ qui à tout e associe sa i-ème coordonnée dans la base ci-dessus. On est donc fondé à appeler e_i^* la "fonction i-ème coordonnée" dans la base considérée. Pour démontrer la dernière formule, il suffit d'appliquer à l'égalité $e = \sum_i x_i e_i$ la forme linéaire e_j^* de chaque côté. A gauche on obtient $e_j^*(e)$; à droite $e_j^*(\sum_i x_i e_i) = \sum_i x_i e_j^*(e_i) = \sum_i x_i \delta_{ij} = x_j$.

Exercice 3.4. *Montrer que pour toute forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que cette forme linéaire soit $X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$ (prendre la base canonique). En déduire un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.*

3.3 Bidual

Définition 3.3. *Le* bidual *d'un espace vectoriel E est le dual de son dual. Notation : E^{**}.*

Théorème 3.2. *On suppose que E est de dimension finie. La fonction $\theta : E \to E^{**}$, $e \mapsto \theta(e)$, définie par : $\forall \varphi \in E^*$,*

$$\theta(e)(\varphi) = \varphi(e),$$

est une application linéaire bijective.

Démonstration. 1. Montrons que θ est bien définie. Il faut montrer que $\theta(e)$ est une application linéaire $E^* \to \mathbb{K}$. C'est bien une fonction de $E^* \to \mathbb{K}$, car $\phi(e) \in \mathbb{K}$. De plus, pour tous $\varphi, \psi \in E^*$ et tous scalaire $a \in \mathbb{K}$, on a

$\theta(e)(\varphi+a\psi) = \theta(e)(\varphi)+a\theta(e)(\psi)$: en effet, le côté gauche est $(\varphi+a\psi)(e) = \varphi(e) + a\psi(e)$, qui est égal au côté droit.

2. Montrons que θ est linéaire. Soient $e, e' \in E$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrons que $\theta(ae + e') = a\theta(e) + \theta(e')$. Le côté gauche évalué en $\varphi \in E^*$ est égal à $\varphi(ae + e')$, et le côté droit évalué en φ est égal à $(a\theta(e)(\varphi) + \theta(e')(\varphi) = a\theta(e)(\varphi) + \theta(e')(\varphi) = a\varphi(e) + \varphi(e')$; on conclut car φ est linéaire.

3. Montrons que θ est injective. Soit e dans le noyau de $\theta : \theta(e) = 0$. Alors pour toute forme linéaire φ sur E, on a $\theta(e)(\varphi) = 0$. C'est-à-dire $\varphi(e) = 0$. Si e n'était pas nul, il existerait une base de E de la forme $e = e_1, e_2, \ldots, e_n$. Considérons alors la base duale $e_i^*, i = 1, \ldots, n$. On a $e_1^*(e) = 1$, ce qui contredit que $\varphi(e) = 0$ pour toute forme linéaire φ.

4. L'injectivité de θ implique la surjectivité car les dimensions de E, E^*, E^{**} sont égales. □

Corollaire 3.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute base de E^* est la base duale d'une base de E.*

Démonstration. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base de E^*. Dans le dual de E^*, donc le bidual E^{**} de E, considérons la base duale de cette base : $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ l'image réciproque par θ de cette base ; c'est une base de E car θ est un isomorphisme $E \to E^{**}$. Nous vérifions que sa base duale est la base $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Nous avons par construction $\theta(e_j) = \varphi_j^*$. Par dualité des bases, on $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \varphi_j^*(\varphi_i) = \theta(e_j)(\varphi_i) = \varphi_i(e_j)$ (par définitionde θ). D'où $e_i^* = \varphi_i$, car ces deux formes linéaires sur E coïncident sur la base des e_i. □

Exercice 3.5. *Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où chaque a_n est dans $\mathcal{N}$. Pour une telle suite, on définit la forme linéaire f_s sur $\mathbb{K}[x]$ par $f_s(P) = \sum_i a_i b_i$, où $P = \sum_i b_i x^i$.*

(i) Montrer que $s \mapsto f_s$, $\mathcal{S} \to K[x]^*$ est un isomorphisme, noté q.

(ii) Chaque polynôme $P = \sum_i b_i x^i$ définit sur $\mathcal{S}$ la forme linéaire g_P telle que $g_P(s) = f_s(P)$. Montrer que $\theta(P) = g_P \circ q^{-1}$.

3.4 Orthogonalité

Définition 3.4. *Soit E un espace vectoriel.*

*1. Soit U une partie de E. L'*orthogonal *de U dans E^*, noté U°, est la partie de E^* définie par*

$$U^\circ = \{\varphi \in E^*, \forall e \in U, \varphi(e) = 0\}.$$

*2. Soit V une partie de E^*. L'*orthogonal *de V dans E, noté V°, est la partie de E définie par*

$$V^\circ = \{e \in E, \forall \varphi \in V, \varphi(e) = 0\}.$$

Une manière de visualiser ces définitions est de faire l'analogie avec les espaces euclidiens. Disons qu'un vecteur $e \in E$ et une forme linéaire $\varphi \in E^*$ sont *orthogonaux* si l'on a $\varphi(e) = 0$. Ainsi, U° est l'ensemble des formes linéaires orthogonales à tous les vecteurs dans E. De même, V° est l'ensemble des vecteurs orthogonaux èà toutes les formes linéaires dans V. Voir aussi l'exercice 3.3.

Lemme 3.1. *Soit E un espace vectoriel, U une partie de E et V une partie de E^*.*

1. $U^\circ = \{\varphi \in E^*, U \subset \mathrm{Ker}(\varphi)\}$.

2. $V^\circ = \cap_{\varphi \in V} \mathrm{Ker}(\varphi)$.

3. U° est un sous-espace de E^*.

4. V° est un sous-espace de E.

5. $\mathrm{Vect}(U)^\circ = U^\circ$ et $\mathrm{Vect}(V)^\circ = V^\circ$.

Démonstration. 1. Ceci découle des équivalence : $\forall e \in U, \varphi(e) = 0 \Leftrightarrow \forall e \in U, e \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow U \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

2. On a $\forall \varphi \in V, \varphi(e) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in V, e \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Donc $V^\circ = \{e \in E, \forall \varphi \in V, \varphi(e) = 0\} = \{e \in E, \forall \varphi \in V, e \in \mathrm{Ker}(\varphi)\} = \cap_{\varphi \in V} \mathrm{Ker}(\varphi)$.

3. Soient $\varphi, \psi \in U^\circ$ et $a \in \mathbb{K}$; montrons que $a\varphi + \psi \in V^\circ$. Si $e \in U$, alors $\varphi(e) = \psi(e) = 0$, donc $(a\varphi + \psi)(e) = a\varphi(e) + \psi(e) = 0$. D'où $a\varphi + \psi \in U^\circ$.

4. Intersection de sous-espaces.

5. Exercice. □

Théorème 3.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E. Alors*

$$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E).$$

La même égalité est vraie lorsque F est un sous-espace de E^*.

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E telle que $e_1, \ldots, e_p$ soit une base de F ($p \leq n$). Soit $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la base duale. Pour qu'une forme linéaire φ sur E s'annule sur F, il faut et il suffit que φ s'annule sur $e_1, \ldots, e_p$ (lemme 3.1 5.). Comme par l'équation (1), $\varphi = \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi(e_i) e_i^*$, $\varphi \in F^\circ$ implique $\varphi = \sum_{p+1 \leq i \leq n} \varphi(e_i) e_i^*$. Donc F° est engendré par $e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*$, car clairement, ces formes linéaires sont dans F°. Mais ces formes linéaires sont linéairement indépendantes (car elles appartiennent une base de E^*), donc elles forment une base de F°.

Pour la deuxième assertion, on raisonne de manière analogue, en utilisant le corollaire 3.2. $\square$

Corollaire 3.3. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, et si V est un sous-espace de E ou de E^*, alors $(V^\circ)^\circ = V$. La fonction $V \mapsto V^\circ$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces de dimension p de E (resp. de E^*) sur l'ensemble des sous-espaces de dimension $n-p$ de E^* (resp, de E).*

Démonstration. Par le théorème on sait que $\dim(V) = \dim(V^{\circ\circ})$ et que cette dimension est finie. Il suffit donc de prouver que $V \subset V^{\circ\circ}$. Montrons-le pour un sous-espace V de E. On a

$$v \in V^{\circ\circ} \Leftrightarrow \forall \varphi \in V^\circ, \varphi(v) = 0.$$

Prenons $v \in V$ et montrons qu'il est dans $V^{\circ\circ}$. Si $\varphi \in V^\circ$, alors $\varphi(v) = 0$ par définition de V°. Donc, par l'équivalence ci-dessus, on $v \in V^{\circ\circ}$.

Pour un sous-espace V de E^*, la preuve est analogue.

On déduit de l'égalité $(V^\circ)^\circ = V$ que la fonction $V \mapsto V^\circ$ est injective. Pour la surjectivité, soit W un sous-espace de E^*. Alors $W = (W^\circ)^\circ$, d'où la surjectivité. $\square$

Corollaire 3.4. $E^\circ = \{0\}, (E^*)^\circ = \{0\}, \{0_E\}^\circ = E^*, \{0_{E^*}\}^\circ = E.$

Démonstration. $\square$

Corollaire 3.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E^*$. Alors $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = E^*$ si et seulement si $Ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_k) = 0$.*

Démonstration. Posons $V = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$. D'après le théorème, $W \mapsto W^\circ$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces de E^* sur l'ensemble des sous-espaces de E. Dans cette bijection, E^* est envoyé sur $\{0_E\}$ par le corollaire 3.4.

Il suffit donc de montrer que $V^\circ = \{0_E\}$. Mais $V^\circ = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}^\circ$, par le lemme 3.1 5. Et d'après 2. dans ce même lemme, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}^\circ = Ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_k) = 0$. $\square$

Proposition 3.3. *Soit E un sous-espace de l'espace vectoriel F. Alors E^* est canoniquement isomorphe à F^*/E° et $(F/E)^*$ est canoniquement isomorphe à E°.*

Démonstration. Les bijections canoniques sont induites par les fonctions $\varphi \in F^* \mapsto \varphi \mid E \in E^*$ et $\varphi \in (F/E)^* \mapsto \varphi \circ \pi \in F^*$, où $\pi : F \to F/E$ est la projection canonique. Etc... $\square$

Exercice 3.6. *Soient V, W des sous-espaces de E (resp. de E^*). Montrer que :*

(i) $V \subset W \Rightarrow W^\circ \subset V^\circ$.

(ii) $(V + W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ$.

Exercice 3.7. *Si X est une partie de l'espace vectoriel E de dimension finie, montrer que $X^{\circ\circ} = \mathrm{Vect}(X)$.*

Exercice 3.8. *Montrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace de E (resp. de E^*) est de la forme X° pour une partie finie de E^* (resp. de E).*

Exercice 3.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit V un sous-espace de E^* et W l'orthogonal de V* dans le dual *E^{**} de E^*. Montrer que $W = \theta(V^\circ)$.*

Exercice 3.10. *Soient E, F deux espaces vectoriels et $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une application bilinéaire. Pour $U \subset E$ et $V \subset F$, on définit*

$$U^\circ = \{f \in F, \forall e \in U, B(e, f) = 0\},$$

et

$$V^\circ = \{e \in E, \forall f \in V, B(e, f) = 0\}.$$

Enoncer et prouver l'analogue du lemme 3.1 pour ces notions.

2. On suppose maintenant que $\{0_E\}^\circ = \{0_F\}$ et que $\{0_F\}^\circ = \{0_E\}$. Supposant ausssi que E, F sont de dimension finie, montrer qu'ils ont même dimension. Démontrer l'analogue du théorème 3.3 et du corollaire 3.3.

3. Quelle application bilinéaire $E \times E^* \to \mathbb{K}$ faut-il utiliser pour retrouver les résultats du cours ?

3.5 Transposée d'une application linéaire

Définition 3.5. *Soient E, F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle* transposée *de f, notée ${}^t f$, la fonction $F^* \to E^*$ définie par ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ pour toute forme linéaire φ dans F^*.*

Pour que cette définition soit cohérente, il faut s'assurer que $\varphi \circ f$ est bien une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$. Mais cela découle de ce que la composée de deux applications linéaires est une appplication linéaire, et de ce que f va de E dans F et φ va de F dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3.4. *Avec les notations précédentes, ${}^t f$ est une application linéaire de F^* dans E^*.*

Démonstration. Soient $\varphi, \psi \in F^*$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrons que ${}^t f(\varphi + a\psi) = {}^t f(\varphi) + a^t f(\psi)$. Les deux côtés de l'égalité sont des formes linéaires sur E. Pour montrer qu'eles sont égales, prenons un vecteur v quelconque dans E et évaluons les deux formes en v.

A gauche, ça donne $(\varphi+a\psi)\circ f(v) = (\varphi+a\psi)(f(v)) = \varphi(f(v)+a\psi(f(v))$. A droite ça donne $(\varphi \circ f + a\psi \circ f)(v) = \varphi \circ f(v) + a\psi \circ f(v) = \varphi(f(v)) + a\psi(f(v)$. $\square$

Théorème 3.4. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors*

$$\mathrm{Ker}({}^t f) = \mathrm{Im}(f)^\circ, \ \mathrm{Im}({}^t f) = \mathrm{Ker}(f)^\circ.$$

Examinons si ces égalités ont du sens : l'espace de départ de ${}^t f$ est F^*, donc son noyau est un sous-espace de F^* ; de plus, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F, donc $\mathrm{Im}(f)^\circ$ est un sous-espace de F^*. La vérification de la cohérence de l'autre égalité se fait de même.

Démonstration. On a pour tout φ dans F^*, $\varphi \in \mathrm{Ker}({}^t f) \Leftrightarrow \varphi \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \forall v \in \mathrm{Im}(f), \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in (\mathrm{Im}(f))^\circ$. Ceci prouve la première égalité.

Par le corollaire 3.3, la deuxième égalité est conséquence de $\mathrm{Im}({}^t f)^\circ = \mathrm{Ker}(f)$. Pour celle-ci, on a : $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in (F^*)^\circ$ (car $(F^*)^\circ = \{0_F\}$, voir preuve du corollaire 3.5) $\Leftrightarrow \forall \varphi \in F^*, \varphi(f(v) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in F^*, \varphi \circ f(v) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in F^*, ({}^t f(\varphi)(v) = 0 \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathrm{Im}({}^t f), \psi(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Im}({}^t f)^\circ$. $\square$

Corollaire 3.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors f et ${}^t f$ ont le même rang.*

Démonstration. On a par le théorème 3.3

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)^\circ) = \dim(F),$$

et par le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Ker}({}^t f)) + \dim(\mathrm{Im}({}^t f)) = \dim(F^*).$$

Par soustraction, sachant que $\dim(F) = \dim(F^*)$ et que par le théorème 3.4 $\dim(\mathrm{Im}(f)^\circ) = \dim(\mathrm{Ker}({}^t f))$,

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Im}({}^t f)) = 0.$$

$\square$

Corollaire 3.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors*

(i) f injective $\Leftrightarrow {}^t f$ surjective ;

(ii) f surjective $\Leftrightarrow {}^t f$ injective.

Démonstration. En utilisant les résultats précédents dans ce chapitre :

(i) f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)^\circ = E^* \Leftrightarrow \mathrm{Im}({}^t f) = E^* \Leftrightarrow {}^t f$ surjective.

(ii) f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)^\circ = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}({}^t f) = 0 \Leftrightarrow {}^t f$ injective. $\square$

Théorème 3.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(U, V)$, où U, V sont des espaces vectoriels de dimension finie, et $u_1, \dots, u_n$, $v_1, \dots, v_p$ des bases de U, V respectivement. Alors la matrice N de ${}^t f$ dans les bases duales $v_1^*, \dots, v_p^*$ et $u_1^*, \dots, u_n^*$ est la transposée de la matrice M de f dans les bases $u_1, \dots, u_n$,$v_1, \dots, v_p$.*

On justifie ainsi la terminologie “transposée” pour ${}^t f$.

Démonstration. Soit $M = (m_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n}$. On a donc $f(u_j) = \sum_{1 \le i \le p} m_{ij} v_i$. Soit $N = (n_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$. On a donc ${}^t f(v_j^*) = \sum_{1 \le i \le n} n_{ij} u_i^*$. Il suffit de prouver que $m_{ij} = n_{ji}$. Pour ceci, évaluons la dernière égalité en u_k. On a

$$ {}^t f(v_j^*)(u_k) = (\sum_{1 \le i \le n} n_{ij} u_i^*)(u_k) = \sum_{1 \le i \le n} n_{ij} u_i^*(u_k) = \sum_{1 \le i \le n} n_{ij} \delta_{ik} = n_{kj}.$$

Mais par ailleurs, ceci vaut aussi

$$ {}^t f(v_j^*)(u_k) = v_j^* \circ f(u_k) = v_j^*(\sum_{1 \le i \le p} m_{ik} v_i) = \sum_{1 \le i \le p} m_{ik} v_j^*(v_i)$$

$$= \sum_{1 \le i \le p} m_{ik} \delta_{ji} = m_{jk}.$$

$\square$

Corollaire 3.8. *La fonction $f \mapsto {}^t f$, $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*,E^*)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Exercice 3.11. *Soient trois espaces vectoriels E, F, G et $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$. Montrer que ${}^t \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}$.*

Exercice 3.12. *Soit V un sous-espace de E et $i : V \to E$ l'injection canonique (donc $i(v) = v$ pour tout $v \in V$). Calculer le noyau de ${}^t i : E^* \to V^*$. Montrer que ${}^t i$ est surjectif. En déduire que V^* est isomorphe à E^*/V°.*

Exercice 3.13. *Soit $\pi : E \to V$ une application linéaire surjective. Montrer que ${}^t\pi : V^* \to E^*$ est injective et calculer son image.*

Exercice 3.14. *Soit u l'appplication linéaire $\mathbb{K} \to M = \mathbb{K}^{n\times n}$ qui envoie a sur la matrice $\mathrm{Diag}(a,a,\ldots,a)$. Calculer la trace $({}^t u(\mathrm{Tr}))(1)$ après avoir compris le sens de cette expression.*

Exercice 3.15. *Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré au plus n sur $\mathbb{K}$. Soit $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ la fonction dérivée. Soit ϕ la forme linéaire sur $\mathcal{P}_{n-1}$ qui envoie tout polynôme P sur $P(0)$. Déterminer la forme linéaire ${}^t D(\phi)$ sur $\mathcal{P}_n$.*

Exercice 3.16. *Soit $f : E \to F$ linéaire. Montrer que $\theta \circ f = {}^t({}^t f) \circ \theta$.*

4 Produit tensoriel

4.1 L'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(X)}$

Soit X un ensemble. On note comme d'habitude $\mathbb{K}^X$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La somme $f+g$ de deux éléments de $\mathbb{K}^X$ est définie par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

pour tout x dans X. Le produit externe af de $a \in \mathbb{K}$ avec $f \in \mathbb{K}^X$ est défini par

$$(af)(x) = af(x)$$

pour tout x dans X.

On note $\mathbb{K}^{(X)}$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ dont le *support* est fini, où le support de f est par définition $supp(f) = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ définie par $f(0) = f(1) = \ldots = f(n) = 1, 0 = f(n+1) = f(n+2) = \ldots$ est de support fini, égal à $\{0, 1, \ldots, n\}$, et $f \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Mais la fonction g définie par $1 = g(x), \forall x \in \mathbb{N}$ est de support $\mathbb{N}$, donc de support infinie : elle n'est pas dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

Proposition 4.1. *$K^{(X)}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$. Ce sous-espace a pour base les fonctions f_x, $x \in X$, définies par $f_x(y) = \delta_{xy}$.*

C'est la *base canonique* de $\mathbb{K}^{(X)}$. Elle est en bijection naturelle avec X : $x \to f_x$ est la bijection.

Toute fonction $f \in \mathbb{K}^{(X)}$ s'exprime dans cette base comme suit :

$$f = \sum_{x \in X} f(x) f_x$$

où le support de cette sommation est fini, c'est-à-dire, les coefficients $f(x)$ sont presque tous nuls (ce qui signifie, nuls sauf un nombre fini d'entre eux).

Il est commode d'identifier la fonction f_x avec x lui-même. L'écriture précédente devient alors

$$f = \sum_{x \in X} f(x) x.$$

Ainsi, on peut voir $\mathbb{K}^{(X)}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X. L'espace $\mathbb{K}^{(X)}$ peut aussi être vu comme l'espace vectoriel dont une base est X. Tout élément de cet espace s'écrit de manière unique comme

$$\sum_{x \in X} \alpha_x x$$

où les coefficients α_x sont dans $\mathbb{K}$ et sont presque tous nuls. On a donc une *injection canonique*

$$i : X \to \mathbb{K}^{(X)},$$

définie par $i(x) = f_x$, et si on identifie f_x et x, on a plus simplement $i(x) = x$.

L'espace $\mathbb{K}^{(X)}$ a la *propriété universelle* suivante :

Proposition 4.2. *Pour tout espace vectoriel V et toute fonction $f : X \to V$, il exitse une unique aplication linéaire $\bar{f} : \mathbb{K}^{(X)} \to V$ telle que*

$$f = \bar{f} \circ i.$$

Démonstration. C'est parce que $\mathbb{K}^{(X)}$ a pour base X, et on applique le corollaire 7.5 dans [1]. □

Exercice 4.1. *Soit x une variable et X l'ensemble $X = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathbb{K}^{(X)}$ est en bijection avec l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[x]$, et que cette bijection est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

4.2 Construction du produit tensoriel $E \otimes F$

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On va appliquer la construction de $\mathbb{K}^{(X)}$ vue dans la sous-section précédente à l'ensemble

$$X = E \times F.$$

On considère donc l'espace vectoriel

$$\mathbb{K}^{(X)} = \mathbb{K}^{(E\times F)}.$$

Cet espace a pour base $E \times F$. Tout élément de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire

$$\sum_{(e,f)\in E\times F} \alpha_{ef}(e, f),$$

où les scalaires α_{ef} sont presque tous nuls.

Attention, l'espace $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ n'est pas du tout l'espace $E \times F$; voir l'exercice 4.2. L'espace $E \times F$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$, il en est une base, il n'en est pas un sous-espace.

Définition 4.1. *Soient E, F des espaces vectoriels et H le sous-espace de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ engendré par les éléments*

$$\begin{gathered}(e_1 + e_2, f) - (e_1, f) - (e_2, f),\\ (e, f_1 + f_2) - (e, f_1) - (e, f_2),\\ (\alpha e, f) - \alpha(e, f),\\ (e, \alpha f) - \alpha(e, f),\end{gathered}$$

pour tous les choix de vecteurs $e, e_1, e_2 \in E$, $f, f_1, f_2 \in F$ et scalaires $\alpha \in \mathbb{K}$. Le produit tensoriel *est l'espace vectoriel quotient de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ par son sous-espace H :*

$$E \otimes F = \mathbb{K}^{(E\times F)}/H.$$

On appelle souvent *tenseur* un élément de l'espace vectoriel $E \otimes F$.

Il découle de la définition du produit tensoriel et des propriétés des quotients qu'on a une application linéaire surjective

$$p : \mathbb{K}^{(E\times F)} \to E \otimes F.$$

Pour tous les vecteurs $e \in E$, $f \in F$, on note

$$p((e, f)) = e \otimes f$$

et on obtient ainsi une fonction

$$E \times F \to E \otimes F, (e, f) \mapsto e \otimes f.$$

Cette fonction est notée φ_0 et on a donc

$$\varphi_0 : E \times F \to E \otimes F, \varphi_0((e, f)) = e \otimes f.$$

Proposition 4.3. *Tout tenseur est une combinaison linéaire, et même une somme, de tenseurs de la forme $e \otimes f$, $e \in E, f \in F$. On a*

$$\begin{aligned}(e_1 + e_2) \otimes f &= e_1 \otimes f + e_2 \otimes f \\ e \otimes (f_1 + f_2) &= e \otimes f_1 + e \otimes f_2, \\ (\alpha e) \otimes f &= \alpha\, e \otimes f \\ e \otimes (\alpha f) &= \alpha\, e \otimes f.\end{aligned}$$

pour tous les vecteurs $e, e_1, e_2 \in E$, $f, f_1, f_2 \in F$ et scalaires $\alpha \in \mathbb{K}$.

On applique ici la priorité d'opération suivante : $\otimes$ a priorité sur les autres opérations (somme, produit par un scalaire).

Démonstration. Tout élément de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ est une combinaison linéaire d'éléments (e, f). Appliquant l'application linéaire surjective p, on obtient que tout tenseur est une combinaison linéaire de tenseurs de la forme $e \otimes f$, $e \in E, f \in F$

La dernière assertion résulte de la définition de H (qui a été défini précisément pour que ces quatres identités soient vraies). Voyons la première identité. On a $(e_1 + e_2, f) - (e_1, f) - (e_2, f) \in H = \ker(p)$; donc $p((e_1 + e_2, f)) - p((e_1, f)) - p((e_2, f)) = 0$, donc $p((e_1 + e_2, f)) = p((e_1, f)) + p((e_2, f))$, et enfin $(e_1 + e_2) \otimes f = e_1 \otimes f + e_2 \otimes f$.

Pour la somme, il suffit de remarquer que $\alpha e \otimes f = (\alpha e \otimes f)$, donc toute combinaison linéaire se transforme en une somme. $\square$

On a clairement

$$(\alpha e) \otimes f = e \otimes (\alpha f),$$

puisque tous deux sont égaux à $\alpha e \otimes f$.

Exercice 4.2. *On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps fini à q éléments, et que E, F sont de dimension respectives n, p. Quelles sont les dimensions et les cardinalités des espaces $E \times F$ et $\mathbb{K}^{(E\times F)}$?*

Exercice 4.3. *Montrer que si X et Y engendrent E et F respectivement, alors les tenseurs $x \otimes y$, $x \in X, y \in Y$, engendrent $E \otimes F$.*

4.3 Applications bilinéaires

Soien E, F, G des espaces vectoriels. Rappelons qu'une fonction $B : E \times F \to G$ est appelée une *application bilinéaire* si pour tout $e \in E$ et tout $f \in F$, les applications $x \mapsto B(x, f)$ et $x \mapsto B(e, x)$, respectivement de E dans $\mathbb{K}$ et de F dans $\mathbb{K}$, sont linéaires.

Théorème 4.1. *On suppose que E, F, G ont pour bases respectives $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_p$, $g_1, \ldots, g_q$. Pour chaque i, j, k on définit une application bilinéaire $B_{ijk} : E \times F \to G$ par son action sur les bases : $B_{ijk}((e'_i, f'_j)) = \delta_{ii'}\delta_{jj'}g_k$. Ces application bilinéaires forment une base de l'espace vectoriel des application bilinéaires $E \times F \to G$. La dimension de cet espace est npq.*

On note $\mathcal{L}_2(E \times F, G)$ l'espace vectoriel des application bilinéaires $E \times F \to G$.

Démonstration. Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Si $\sum_{ijk} a_{ijk}B_{ijk} = 0$, évaluons cette application bilinéaire en (e'_i, f'_j) : ça donne $0 = \sum_{ijk} a_{ijk}B_{ijk}((e'_i, f'_j)) = \sum_{ijk} a_{ijk}\delta_{ii'}\delta_{jj'}g_k = \sum_k a_{i',j',k}g_k$; comme les g_k sont linéairement indépendants,on doit avoir $a_{i',j',k} = 0$. $\square$

Rappelons qu'on appelle *forme bilinéaire* une application bilinéaire $E \times F \to \mathbb{K}$.

Corollaire 4.1. *L'espace des formes bilinéaires $E \times F \to \mathbb{K}$ est de dimension $\dim(E)\dim(F)$.*

Exercice 4.4. *On note $\mathcal{L}_2(E \times F, G)$ l'espace vectoriel des appplications bilinéaires de $E \times F$ vers G. Montrer que $\mathcal{L}_2(E \times F, G)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$.*

4.4 Propriété universelle du produit tensoriel

Rappelons que nous avons défini une fonction

$$\varphi_0 : E \times F \to E \otimes F, (e, f) \mapsto e \otimes f.$$

Théorème 4.2. *La fonction φ_0 est bilinéaire.*

Pour tout espace vectoriel G et toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$, il existe une unique application linéaire $h : E \otimes F \to G$ telle que $B = h \circ \varphi_0$.

Démonstration. La première assertion découle des quatre identités de la proposition 4.3.

Pour la seconde, considérons G et B comme dans l'énoncé. L'unicité de $h : E \otimes F \to G$ telle que $B = h \circ \varphi_0$ découle de ce que les $e \otimes f$ engendrent l'espace vectoriel $E \otimes F$ (proposition 4.3), et que $h(e \otimes f) = B(e, f)$.

Existence de h : par la propriété universelle de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ (proposition 4.2), il existe une application linéaire $g : \mathbb{K}^{(E\times F)} \to G$ telle que $g((e, f)) = B(e, f)$ pour tous les $(e, f) \in E \times F$. Il découle des propriétés des appplications bilinéaires que le sous-espace H de $\mathbb{K}^{(E\times F)}$ (définition 4.1) est contenu dans le noyau de g. Il découle alors de la propriété universelle des quotients (théorème 9.1 dans [2]), appliquée à $E \otimes F = \mathbb{K}^{(E\times F)}/H$, qu'il existe une application linéaire $h : E \otimes F \to G$ telle que $g = h \circ p$. On a alors pour tous e, f : $B(e, f) = g((e, f)) = h(p((e, f))) = h(e \otimes f) = h \circ \varphi_0((e, f))$. □

Corollaire 4.2. *L'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ vers G est naturellement isomorphe à l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ vers G.*

Démonstration. On définit une fonction du second espace vers le premier : $h \mapsto h\circ\varphi_0$. On vérifie que cette fonction est bien définie ($h\circ\varphi_0$ est bilinéaire $E\times F \to G$), et que c'est une application linéaire. Le fait qu'elle est bijective découle directement du théorème. □

Corollaire 4.3. *L'espace des formes bilinéaires sur $E\times F$ est naturellement isomorphe à l'espace des formes linéaires sur $E \otimes F$.*

Corollaire 4.4. *On suppose que E, F sont de dimension finie. La dimension de $E \otimes F$ est $\dim(E) \dim(F)$. Si $e_1, \dots, e_n$ et $f_1, \dots, f_p$ sont des bases de E et F respectivement, alors les $e_i \otimes f_j$ forment une base de $E \otimes F$.*

Démonstration. L'espace $E \otimes F$ est engendré par les $e \otimes f$ (proposition 4.3), donc, grâce aux formules de cette proposition, par les $e_i \otimes f_j$. Il est donc de dimension finie. La dimension de $E \otimes F$ est donc égale à celle de son dual (corollaire 3.1). Elle est donc égale à la dimension de l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$, donc c'est bien $\dim(E) \dim(F)$ par le corollaire 4.1. Enfin, la base est bien celle indiqué, puisqu'elle engendre l'espace et a le bon nombre d'éléments. □

Exercice 4.5. *Si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, montrer que tout vecteur dans $E \otimes F$ est somme d'au plus $\min(n, p)$ tenseurs de la forme $e \otimes f$.*

4.5 Isomorphismes canoniques : neutre, commutativité et associativité

Commençons par un isomorphisme simple, dont la preuve illustre les méthodes de démonstration qui vont suivre.

Proposition 4.4. $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}, a \otimes b \mapsto ab$.

On peut déjà voir que les deux côtés ont la même dimension (corollaire 4.4).

Démonstration. La fonction $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a, b) \mapsto ab$, est bilinéaire. Il existe donc par le théorème 4.2 une application linéaire $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}, a \otimes b \mapsto ab$, qui est forcément un isomorphisme, car les dimensions valent 1 et que l'application est non nulle : elle envoie $1 \otimes 1$ sur 1. □

Proposition 4.5. *Il existe un unique isomorphisme* $E \otimes F \to F \otimes E, e \otimes f \mapsto f \otimes e$.

Démonstration. On considère la fonction $E \times F \to F \otimes E, (e, f) \mapsto f \otimes e$. Elle est bilinéaire, comme il découle de la proposition 4.3. Il existe donc par le théorème 4.2 une application linéaire $E \otimes F \to F \otimes E$ qui envoie $e \otimes f$ sur $f \otimes e$.

De manière symétrique, il existe une appplication linéaire $F \otimes E \to E \otimes F, f \otimes e \mapsto e \otimes f$.

Ces deux applications linéaires sont inverses l'une de l'autre, car $E \otimes F$ (resp. $F \otimes E$) est engendré par les $e \otimes f$ (resp. $f \otimes e$), par la même proposition. □

Proposition 4.6. *Soient trois espaces vectoriels* E, F, G*. Il existe un unique isomorphisme de* $E \otimes (F \otimes G)$ *vers* $(E \otimes F) \otimes G$*, qui envoie chaque vecteur* $e \otimes (f \otimes g)$ *sur* $(e \otimes f) \otimes g$.

Démonstration. Par une double application de la proposition 4.3, on obtient que $E \otimes (F \otimes G)$ est engendré par les éléments $e \otimes (f \otimes g)$; il en découle l'unicité de l'isomorphisme de l'énoncé.

Prouvons l'existence. Soit $e \in E$. La fonction $\lambda_e : F \times G \to (E \otimes F) \otimes G, (f, g) \mapsto (e \otimes f) \otimes g$ est bilinéaire (vérifier, en utilisant la proposition 4.3). Il existe donc par le théorème 4.2 une unique application linéaire $\bar{\lambda}_e : F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G$ telle que $\bar{\lambda}_e(f \otimes g) = (e \otimes f) \otimes g$.

On vérifie que la fonction de E vers l'espace des applications linéaires $F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G$, qui envoie e sur $\bar{\lambda}_e$, est une application linéaire.

Maintenant, la fonction $E \times (F \otimes G) \to (E \otimes F) \otimes G, (e,t) \mapsto \bar{\lambda}_e(t)$, est bilinéaire, comme on le vérifie en utilisant ce qui précède, ainsi que la linéarité de $\bar{\lambda}_e$. Il existe donc par le théorème 4.2 une application linéaire $E \otimes (F \otimes G) \to (E \otimes F) \otimes G$, $e \otimes t \mapsto \bar{\lambda}_e(t)$. Cette application linéaire envoie donc $e \otimes (f \otimes g)$ sur $\bar{\lambda}_e(f \otimes g) = (e \otimes f) \otimes g$. C'est donc l'application cherchée.

Par un raisonnement analogue, il existe une application linéaire $(E \otimes F) \otimes G \to E \otimes (F \otimes G)$ qui envoie $(e \otimes f) \otimes g$ sur $e \otimes (f \otimes g)$. C'est l'application inverse de la précédente, et ce sont donc des isomorphismes. □

Exercice 4.6. *Montrer que $\mathbb{K} \otimes E$ et $E \otimes \mathbb{K}$ sont canoniquement isomorphes à E.*

4.6 Isomorphismes canoniques : applications linéaires

Proposition 4.7. *Soient E, F, G, H des espaces vectoriels de dimension finie. Alors*

$$\mathcal{L}(E,G) \otimes \mathcal{L}(F,H) \simeq \mathcal{L}(E \otimes F, G \otimes H).$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{L}(E,G)$, $\beta \in \mathcal{L}(F,H)$. La fonction $E \times F \to G \otimes H, (e,f) \mapsto \alpha(e) \otimes \beta(f)$, est bilinéaire (proposition 4.3 et linéarité de α et β). Il existe donc (théorème 4.2) une unique application linéaire $T(\alpha, \beta)$: $E \otimes F \to G \otimes H, e \otimes f \mapsto \alpha(e) \otimes \beta(f)$. La fonction $\mathcal{L}(E,G) \times \mathcal{L}(F,H) \to \mathcal{L}(E \otimes F, G \otimes H), (\alpha, \beta) \mapsto T(\alpha, \beta)$ est bilinéaire, comme on le vérifie par l'unicité. Il existe donc (théorème 4.2) une application linéaire $\tau : \mathcal{L}(E,G) \otimes \mathcal{L}(F,H) \to \mathcal{L}(E \otimes F, G \otimes H), \alpha \otimes \beta \mapsto T(\alpha, \beta)$.

Les espaces vectoriels dans le théorème ont la même dimension, qui est le produit des quatre dimensions (proposition 7.10 dans [1] et corollaire 4.4).

Montrons que τ est surjective, ce qui suffira pour prouver le théorème. Soient $(e_i), (f_j), (g_k), (h_l)$ des bases de E, F, G, H respectivement. Alors les $e_i \otimes f_j$ (resp. $g_k \otimes h_l$) forment une base de $E \otimes F$ (resp. $G \otimes H$), par le même corollaire. Soit m_{ijkl} l'application linéaire de $E \otimes F$ vers $G \otimes H$ qui envoie $e_i \otimes f_j$ sur $g_k \otimes h_l$, el les autres $e_{i'} \otimes f_{j'}$ sur 0 ; ces application linéaires forment une base de $\mathcal{L}(E \otimes F, G \otimes H)$. Nous construisons un élément t de $\mathcal{L}(E,G) \otimes \mathcal{L}(F,H)$ tel que $\tau(t) = m_{ijkl}$; cela prouvera la surjectivité.

On prend $t = \alpha \otimes \beta$ où : $\alpha(e_{i'}) = \delta_{ii'} g_k$, $\beta(f_{j'}) = \delta_{jj'} h_l$. On a par construction $\tau(t) = T(\alpha, \beta)$ et donc $\tau(t)(e_{i'} \otimes f_{j'}) = \alpha(e_{i'} \otimes \beta(f_{j'}) = (\delta_{ii'} g_k) \otimes (\delta_{jj'} h_l) = \delta_{ii'} \delta_{jj'} g_k \otimes h_l$ et par suite $\tau(t) = m_{ijkl}$. □

Corollaire 4.5. *Si E est de dimension finie, $E^* \otimes E^* \simeq (E \otimes E)^*$. L'isomorphisme envoie $\sum_i \varphi_i \otimes \psi_i$ sur la forme linéaire $E \otimes E \to \mathbb{K}, e \otimes e' \mapsto \sum_i \varphi_i(e) \psi_i(e')$.*

Démonstration. D'après la proposition 4.7, on a $E^* \otimes E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(E \otimes E, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K})$ et d'après sa preuve, cet isomorphisme envoie $\varphi \otimes \psi \in E^* \otimes E^*$ sur l'application linéaire $E \otimes E \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}, e \otimes e' \mapsto \varphi(e) \otimes \psi(e')$. En composant avec l'isomorphisme de la proposition 4.4, on obtient le résultat. □

Exercice 4.7. *Montrer que si E, F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est canoniquement isomorphe à $E^* \otimes F$. Indication : montrer que $E^* \times F \to (E, F), (\varphi, f) \mapsto (e \mapsto \varphi(e) f)$ est une application bilinéaire bien définie. Elle induit une application linéaire $E^* \otimes F \to (E, F)$, qui est un isomorphisme, en regardant des bases.*

Exercice 4.8. *Retrouver l'isomorphisme de l'exercice précédent en utilisant la proposition 4.7.*

4.7 Produit tensoriel de n espaces

Soit $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une fonction $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est dite *n-linéaire* si quel que soit $i = 1, \ldots, n$, et quels que soient v_j, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus i$, la fonction $E_i \to F$, $v \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ est linéaire.

Le *produit tensoriel des n espaces* $E_1, \ldots, E_n$ est

$$E_1 \otimes \ldots \otimes E_n = \mathbb{K}^{(X)}/H,$$

où $X = E_1 \times \ldots \times E_n$ et H est le sous-espace de $\mathbb{K}^{(X)}$ engendré par les éléments

$$(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i + f_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) - (e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

$$-(e_1, \ldots, e_{i-1}, f_i, e_{i+1}, \ldots, e_n),$$

$$(e_1, \ldots, e_{i-1}, a e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) - a(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n),$$

pour tous les choix $i = 1, \ldots, n$, $e_j \in E_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $f_i \in E_i$, $a \in \mathbb{K}$.

Notons

$$p : \mathbb{K}^{(X)} \to E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$$

l'application linéaire canonique. Notons

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_n = p((e_1, \ldots e_n))$$

pour $e_i \in E_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Notons aussi

$$\varphi_0 : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_1 \otimes \ldots \otimes E_n, (e_1, \ldots, e_n) \mapsto e_1 \otimes \ldots \otimes e_n.$$

Cette fonction est n-linéaire.

On a alors la **propriété universelle du produit tensoriel de** n **espaces vectoriels** : pour tout espace vectoriel F et tout application n-linéaire $B : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$, il existe une unique application linéaire $h : E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \to F$ telle que $B = h \circ \varphi_0$.

Propriétés de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$:

1. L'espace vectoriel des applications n-linéaires $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n, F)$.
2. Si les dimensions des E_i sont finies, alors $\dim(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) = \dim(E_1) \cdots \dim(E_n)$.
3. Si chaque E_i admet une base finie B_i, alors l'ensemble des vecteurs $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, $v_i \in B_i$, forme une base de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$.
4. Tout élément de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ est une somme de $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$, où chaque e_i est dans E_i.
5. Le produit tensoriel d'espaces vectoriels est commutatif et associatif, à isomorphisme près.
6. $(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)^*$ est isomorphe à $E_1^* \otimes \ldots \otimes E_n^*$. L'isomorphisme de la droite vers la gauche envoie $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$ ($\varphi_i \in E_i^*$) sur la forme linéaire Φ de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ telle que $\Phi(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) = \varphi_1(e_1) \cdots \varphi_n(e_n)$.
7. $\mathbb{K} \otimes \ldots \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}$.

Les démonstrations de toutes ces propriétés sont très semblables au cas où $n = 2$.

4.8 Algèbre tensorielle

Rappels sur la somme directe : la *somme directe (externe)* $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$ d'une suite infinie d'espaces $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ est l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où chaque x_n est dans E_n et où les x_n sont presque tous nuls. L'espace E_n s'injecte naturellement dans cette somme directe : $x \in E_n$ est envoyé sur la suite (x_n) où $x_n = x$ et où les autres x_i sont nuls ; on identifiera E_n avec son image. Si chaque E_n a la base B_n, alors la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ (avec l'identification mentionnée) est une base de la somme directe.

Définition 4.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'*algèbre tensorielle *sur E, notée $T(E)$, est*

$$T(E) = \bigoplus_{n \geq 0} E^{\otimes n}.$$

Autrement dit : $T(E)$ est la somme directe de toutes les puissances tensorielles de E. Il faut noter que $E^{\otimes 0}$ est $\mathbb{K}$, que $E^{\otimes 01} = E$, $E^{\otimes 2} = E \otimes E$, etc. . . .

Une $\mathbb{K}$-*algèbre* est un anneau qui contient $\mathbb{K}$ dans son centre.

Théorème 4.3. *$T(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour tous $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_p$, le produit de $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ et de $f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ est $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$, ce qui détermine entièrement ce produit.*

La preuve du théorème s'appuie sur le lemme suivant, dont la démonstration est semblable à celle de la proposition 4.6.

Lemme 4.1. *Soeint $E_, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_p$ des espaces vectoriels. Il existe un isomorphisme canonique de $(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \otimes (F_1 \otimes \ldots \otimes F_p)$ sur $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p$, qui envoie chaque vecteur $(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) \otimes (f_1 \otimes \ldots \otimes f_p)$ sur $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$.*

Théorème 4.4. *On suppose que E a la base finie X. Alors une base de $T(E)$ est l'ensemble des produits $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, $n \geq 0$, $x_i \in X$.*

L'algèbre tensorielle $T(E)$ s'identifie ainsi à l'algèbre des *polynômes non commutatifs* en les variables $x \in X$.

Exercice 4.9. *Montrer que l'algèbre tensorielle est* graduée *: il existe un fonction* $\deg : T(E) \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ *telle que : (i)* $\deg(x) = -\infty \Leftrightarrow x = 0$ *; (ii)* $\deg(x+y) \leq max(\deg(x), \deg(y)$ *et* $\deg(xy) = \deg(x) + \deg(y)$.

5 Produit extérieur

5.1 Applications bilinéaires alternées

Définition 5.1. *Une application bilinéaire $B : E \times E \to F$ est dite* alternée *si pour tous vecteur $e \in E$, on a $B(e,e) = 0$. Elle est dite* anti-symétrique *si $B(x,y) = -B(y,x)$.*

Proposition 5.1. *Soient E, F des espaces vectoriels.*

(i) L'ensemble des applications bilinéaires alternées de $E \times E$ vers F est un sous-espace de $\mathcal{L}_2(E \times E, F)$.

(ii) Une application alternée est anti-symétrique. La réciproque est vrai si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est $\neq 2$.

(iii) Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E, et B une application bilinéaire $E \times E \to F$, alors B est alternée si et seulement si $B(e_i, e_i) = 0$ et $B(e_i, e_j) = -B(e_j, e_i)$ pour tous i, j.

Proposition 5.2. *Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E et $f_1, \dots, f_p$ une base de F. Alors l'espace des applications bilinéaires alternées a pour base les applications B_{ijk}, $1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq p$, définies par*

$$\begin{array}{rcl} B_{ijk}(e_i, e_j) & = & f_k \\ B_{ijk}(e_j, e_i) & = & -f_k \\ B_{ijk}(e_r, e_s) & = & 0 \end{array}$$

si $(r, s) \neq (i, j), (j, i)$.

Démonstration. Pour vérifier qu'une application bilinéaire $B : E \times E \to F$ est alternée, il suffit de vérifier que $B(e_i, e_i) = 0$ et que $B(e_i, e_j) = -B(e_j, e_i)$, pour tous les i, j (exercice).

On en déduit facilement que les B_{ijk} sont alternées.

Soit maintenant une application bilinéaire alternée $E \times E \to F$ quelconque. Posons $B(e_i, e_j) = \sum_k a_{ijk} f_k$ $(a_{ijk} \in \mathbb{K})$. On a $B = \sum_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq p} a_{ijk} B_{ijk}$. En effet les deux côtés sont des application bilinéaires alternées ; il suffit donc de vérifier qu'elles coïncident sur tous les couples $(e_r, e_s), r < s$. A droite ça donne $\sum_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq p} a_{ijk} B_{ijk}(e_r, e_s)$. Comme $B_{ijk}(e_r, e_s)$ est nul sauf si $i = r$ et $j = s$ auquel cas ça vaut f_k, on obtient $\sum_{1 \leq k \leq p} a_{rsk} f_k = B(e_r, e_s)$, ce qu'on voulait vérifier.

Montrons maintenant que les B_{ijk} sont linéairement indépendants. Supposons que $\sum_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq p} b_{ijk} B_{ijk} = 0$. On évalue en $(e_r, e_s), r < s$: $0 = \sum_{1 \leq k \leq p} b_{rsk} f_k$, donc les scalaires b_{rsk} sont tous nuls. □

Corollaire 5.1. *L'espace des formes bilinéaires alternées $E \times E \to \mathbb{K}$ est de dimension $\binom{n}{2}$.*

Exercice 5.1. *Montrer que si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est 2, alors une application bilinéaire est symétrique si et seulement elle est anti-symétrique.*

5.2 Carré extérieur d'un espace

Définition 5.2. *Le* carré extérieur *d'un espace vectoriel E est l'espace quotient $\mathbb{K}^{(E \times E)}/L$, où L est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E \times E)}/L$ engendré par les vecteurs*

$$\begin{array}{c} (e_1 + e_2, e_3) - (e_1, e_3) - (e_2, e_3), \\ (e_1, e_2 + e_3) - (e_1, e_2) - (e_1, e_3), \\ (ae_1, e_2) - a(e_1, e_2), \\ (e_1, ae_2) - a(e_1, e_2), \\ (e, e), \end{array}$$

pour tous les choix de vecteurs e_1, e_2, e_3, e *dans* E *et scalaires* a *dans* $\mathbb{K}$. *Notation pour le carré extérieur de* E : $E \wedge E$. *Notation pour l'application linéaire canonique :* $p : \mathbb{K}^{(E\times E)} \to E \wedge E$. *Notation :* $e_1 \wedge e_2 = p((e_1, e_2))$ *pour tous vecteurs* e_1, e_2 *dans* E.

Proposition 5.3. $E \wedge E$ *est canoniquement isomorphe au quotient de* $E \otimes E$ *par son sous-espace engendré par les* $e \otimes e$, $e \in E$.

Démonstration. $\square$

Proposition 5.4. *Tout élément de* $E \wedge E$ *est une somme* $e_1 \wedge e_2$, $e_1, e_2 \in E$. *Dans* $E \wedge E$, *on a les identités*

$$
\begin{gathered}
(e_1 + e_2) \wedge e_3 = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3, \\
e_1 \wedge (e_2 + e_3) = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3, \\
(ae_1) \wedge e_2 = a(e_1 \wedge e_2), \\
e_1 \wedge (ae_2) = a(e_1 \wedge e_2), \\
e \wedge e = 0, \\
e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1,
\end{gathered}
$$

pour tous les choix de vecteurs e_1, e_2, e_3, e *dans* E *et scalaires* a *dans* $\mathbb{K}$.

L'espace $E \wedge E$ possède la *propriété universelle* suivante.

Théorème 5.1. *L'application* $\varphi_0 : E \times e \to E \wedge E, (e, f) \mapsto e \wedge f$, *est bilinéaire alternée. Pour toute application bilinéaire alternée* $B : E \times E \to F$, *il existe une unique application linéaire* $h : E \wedge E \to F$ *telle que* $B = h \circ \varphi_0$.

Démonstration. La première assertion découle de la proposition précédente. L'unicité de h découle de ce que les $e \wedge e$ engendrent $E \wedge E$. Pour l'existence, on étend d,abord B en une application linéaire $\bar{B} : \mathbb{K}^{E\times E} \to F$ (profitant de ce que $E \times E$ est une base de $\mathbb{K}^{E\times E}$) et on remarque que le noyau de $\bar{B}$ contient le sous-espace L. On peut alors factoriser $\bar{B}$ à travers le quotient $\mathbb{K}^{E\times E}/L = E \wedge E$, et on obtient la dernière égalité. $\square$

Corollaire 5.2. *L'espace des application bilinéaires alternées* $E \times E \to F$ *est isomorphe à* $\mathcal{L}(E \wedge E, F)$.

Corollaire 5.3. *Si* E *est de dimension finie avec base* $e_1, \ldots, e_n$, *l'espace* $E \wedge E$ *est de dimension* $\binom{n}{2}$, *avec base les* $e_i \wedge e_j$, $1 \leq i < j \leq n$.

En particulier, $E \wedge E = 0$ si $\dim(E) = 1$.

Démonstration. La dimension de $E \wedge E$ est égale à celle de son dual. Celui-ci est $\mathcal{L}(E \wedge E, \mathbb{K})$, qui est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires alternées sur E (corollaire précédent). Celui-ci est de dimension $\binom{n}{2}$ par le corollaire 5.1. $\square$

Corollaire 5.4. *Toute application linéaire $u : E \to F$ induit une unique application linéaire $E \wedge E \to F \wedge F$, notée $u \wedge u$, telle que pour tous $x, y \in E$, on a $(u \wedge u)(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$.*

Démonstration. On considère la fonction $E \times E \to F \wedge F, (x, y) \mapsto u(x) \wedge u(y)$. Elle est bilinéaire alternée. On applique le théorème. $\square$

Rappelons qu'un plan (resp. une droite) d'un espace vectoriel est un sous-espace de dimension 2 (resp. dimension 1).

Corollaire 5.5. *On suppose que E est de dimension finie. La fonction qui à un plan de E associe la droite de $E \wedge E$ engendrée par $x \wedge y$, où x, y engendrent le plan, est injective.*

Démonstration. Si $x,' y'$ est une autre base, alors $x' = ax + by, y' = cx + dy$. Donc $x' \wedge y' = (ax + by) \wedge (cx + dy) = (ad - bc)x \wedge y$. La fonction est donc bien définie.

Si P, P' sont deux plans différents, nous avons deux cas. Soit F le sous-espace engendré par $P \cup P'$.

1. $\dim(F) = 3$: il existe alors une base x, y, z de F telle que x, y soit une base de P et y, z soit une base de P'. Alors les vecteurs $x \wedge y$ et $y \wedge z$ sont linéairement indépendants (corollaire 5.3). Donc les plans P, P' ont une image distincte.
2. $\dim(F) = 4$: il existe alors une base x, y, z, t de F telle que x, y soit une base de P et z, t soit une base de P'. Alors cette base de F s'étend en une base de E, et il s'ensuit par le Corollaire 5.3 que $x \wedge y$ et $y \wedge z$ sont linéairement indépendants. Donc les plans P, P' ont une image distincte.

$\square$

Il découle du corollaire précédent que l'ensemble des plans de E s'injecte naturellement dans l'espace projectif sur $E \wedge E$. Rappelons que l'*espace projectif* $P(V)$ sur un espace V est par définition l'ensemble des droites de V.

Exercice 5.2. *Montrer que $E \wedge E$ est canoniquement isomorphe à $E \otimes E / H$, où H est le sous-espace de $E \otimes E$ engendré par les vecteurs $e \otimes e$.*

Exercice 5.3. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Pourquoi ne peut-on pas définir une application linéaire $E \wedge E \to F \wedge F$ qui envoie $x \wedge y$ sur $u(x) \wedge v(y)$?*

Exercice 5.4. *Montrer que'il existe une unique application linéaire $\omega : V \otimes V \to V \otimes V$ telle que $\omega(u \otimes v) = v \otimes u$. Un élément t de $V \otimes V$ est dit symétrique (resp. anti-symétrique) si $\omega(t) = t$ (resp. $= -t$). Montrer que l'ensemble S (resp. A) des éléments symétriques (resp. anti-symétriques) est un sous-espace de $V \otimes V$. On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas 2 (c'est-à-dire $1{+}1 \neq 0$).Montrer que S (resp. A) est engendré par les éléments $u \otimes v + v \otimes u$ (resp. $u \otimes v - v \otimes u$). Montrer que $V \otimes V$ est somme directe de ces deux sous-espaces. Montrer que $V \wedge V$ est canoniquement isomorphe à A (utiliser la fonction $u \wedge v \mapsto (1/2)(u \otimes v - v \otimes u)$).*

5.3 Puissance extérieure d'un espace

La *n-ème puisance extérieur d'un espace vectoriel E* est

$$\bigwedge^n E = \mathbb{K}^{(X)}/H,$$

où $X = E^n$ et H est le sous-espace de $\mathbb{K}^{(X)}$ engendré par les éléments

$$(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i + f_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) - (e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

$$-(e_1, \ldots, e_{i-1}, f_i, e_{i+1}, \ldots, e_n),$$

$$(e_1, \ldots, e_{i-1}, ae_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) - a(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n),$$

pour tous les choix $i = 1, \ldots, n$, $e_j \in E_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $f_i \in E_i$, $a \in \mathbb{K}$, ainsi que tous les éléments de E^n dont au moins deux composantes sont égales.

On note $e_1 \wedge \ldots e_n$ l'image canonique de $(e_1, \ldots, e_n)$ dans $\bigwedge^n E$. On note $\phi_0 : E^n \to \bigwedge^n E, (e_1, \ldots, e_n) \mapsto e_1 \wedge \ldots e_n$.

Rappel d'algèbre linéaire 2 : application n-linéaire alternée, voir [2] définition 21.2.

Théorème 5.2. *L'application φ_0 est n-linéaire alternée. Pour tout application n-linéaire alternée $B : E^n \to F$, il existe une unique application linéaire $\bigwedge^n E \to F$ telle que $B = h \circ \varphi_0$.*

Corollaire 5.6. *L'espace des applications n-linéaires alternées $E^n \to F$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\bigwedge^n E, F)$.*

Corollaire 5.7. *Si E est de dimension d, alors $\bigwedge^n E$ est de dimension $\binom{d}{n}$. Si $e_1, \ldots, e_d$ est une base de E, alors $\bigwedge^n E$ a pour base les éléments $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq d$.*

Exercice 5.5. *Montrer que si $e_1, \dots, e_n$ et $f_1, \dots, f_n$ sont des bases de E, avec $f_j = \sum_i a_{ij} e_i$, alors $f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \det(A) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, où A est la matrice a_{ij}.*

5.4 Sous-espaces

Corollaire 5.8. *La fonction qui a un sous-espace F de dimension n de E associe la droite de $\bigwedge^n E$ engendrée par $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, $e_1, \dots, e_n$ base de F, est injective.*

Corollaire 5.9. *Des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de E sont linéairement indépendants si et seulement si $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$.*

5.5 Algèbre extérieure

L'algèbre extérieure de E est

$$\bigwedge E = \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n E.$$

C'est une $\mathbb{K}$-algèbre telle que le produit de $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ et de $f_1 \wedge \dots f_k$ est $e_1 \wedge \dots e_n \wedge f_1 \wedge \dots f_k$.

Exercice 5.6. *Montrer que l'algèbre extérieure $\bigwedge E$ est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(E)$ par l'idéal engendré par les tenseurs $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ tels qu'il existe $1 \leq i < j \leq$ avec $e_i = e_j$.*

Exercice 5.7. *Soient deux sous-espaces F, G de E, avec base $f_1, \dots f_p$, $g_1, \dots, g_q$. Soient $u = f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ et $v = g_1 \wedge \cdots \wedge g_q$. Montrer que $F \cap G \neq 0$ si et seulement si $u \wedge v = 0$.*

6 Compléments sur les espaces vectoriels : dimension infinie

6.1 Existence d'une base dans le cas de la dimension infinie

Rappelons qu'une partie L d'un espace vectoriel E est dite linéairement dépendante s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \dots, v_n$ dans L et des scalaires non tous nuls tels que $\sum_i a_i v_i = 0$. Une partie linéairement indépendante est une partie qui n'est pas linéairement dépendante.

On utilise le résultat suivant, appelé *Lemme de Zorn.* Pour cela on considère un ensemble ordonné E ; un élément x de E est dit *maximal* (resp.

minimal) si pour tout y dans E, $y \geq x$ implique $y = x$ (resp. si pour tout y dans E, $y \leq x$ implique $y = x$). Autrement dit : x est maximal s'il n'y a pas dans E d'élément plus grand que x. Cela ne signifie pas que x est le maximum de E ; voir exercice 6.1.

L'ensemble E est dit *inductif* si pour tout partie totalement ordonnée F de E, F a un *majorant* dans E, c'est-à-dire un $y \in E$ tel que $\forall x \in F$, $x \leq y$.

Théorème 6.1. *(Lemme de Zorn) Tout ensemble non vide ordonné inductif a au moins un élément maximal.*

Avant de l'appliquer, prouvons ce joli résultat mettant en lumière la symétrie entre “linéairement indépendant” et “générateur”.

Proposition 6.1. *Soit H une partie d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) H est une base de E.

(ii) H est maximal dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des parties linéairement indépendantes de E, ordonné par inclusion.

(iii) H est minimal dans l'ensemble $\mathcal{G}$ des parties génératrices de E, ordonné par inclusion.

Démonstration. □

Théorème 6.2. *Tout espace vectoriel a une base.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des parties linéairement indépendantes de l'espace vectoriel E, avec l'ordre d'inclusion, est inductif.

Soit maintenant une partie $\mathcal{J}$ totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Faisons la réunion L de toutes les éléments de $\mathcal{J}$ (ces éléments sont des parties de E !). Montrons que L est une partie linéairement indépendante. Sinon, il existe des vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_n$ dans L et des scalaires non tous nuls tels que $\sum_i a_i v_i = 0$. Chaque v_i est dans L, donc dans un élément L_i de $\mathcal{J}$. Les éléments $L_1, \ldots, L_n$ sont dans $\mathcal{J}$ qui est totalement ordonné ; donc l'un des L_i est plus que tous les autres, c'est-à-dire, les contient. Alors $v_1, \ldots, v_n \in L_i$, ce qui contredit que L_i doit être une partie linéairement indépendante. □

On peut plus généralement démontrer le théorème suivant, qui contient aussi le théorème de la base incomplète.

Théorème 6.3. *Si dans un espace vectoriel, on a une partie linéairement indépendante L et une partie génératrice G telles que $L \subset G$, alors il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$.*

La preuve est laissée en exercice.

On peut toujours appeler dimension la cardinalité commune des bases. Car on a le théorème suivant, dont la preuve repose sur des arguments de cardinaux infinis.

Théorème 6.4. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension infinie ont la même cardinalité.*

Démonstration. Soit une base B de E. Ecrivons $B = (u_i)_{i \in I}$, donc $|B| = |I|$. Soit C une autre base. Tout v dans C est une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs dans B : il existe une partie finie J_v de I telle que v est combinaison linéaire des u_j, $j \in J_v$. On a $I = \cup_{v \in C} J_v$, car sinon, E serait engendré par une partie propre de B, qui ne serait pas une base. Notons $\aleph_0$ la cardinalité de $\mathbb{N}$. Alors, par des propriétés bien connues des cardinaux infinis (pas si évidentes que ça en fait), on a : $|B| = |I| \leq \sum_{v \in C} |J_v| \leq \sum_{v \in C} \aleph_0 \leq |C|\aleph_0 = |C|$.

Par symétrie, on a aussi $|C| \leq |B|$, d'où l'égalité. $\square$

Une chose qui ne marche pas, c'est le théorème qui dit que si E est un sous-espace de F et si E, F ont même dimension, alors ils sont égaux ; contre-exemple laissé au lecteur (voir l'exercice 6.3).

Exercice 6.1. *(i) Donner un exemple d'ensemble ordonné E ayant au moins deux éléments maximaux. Sont-ils comparables ?*

(ii) Montrer que si E est totalement ordonné, alors x maximal implique x maximum.

Exercice 6.2. *Démontrer le théorème 6.3, en montrant que l'ensemble des parties linéairement indépendantes K telles que $L \subset K \subset G$ est inductif.*

Exercice 6.3. *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[x]$. Trouver une base. Trouver un sous-espace de dimension dénombrable qui est différent de $\mathbb{K}[x]$.*

Exercice 6.4. *Montrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(X)}$ est la cardinalité de X. En déduire qu'il existe des espaces vectoriels de dimension arbitraire.*

Exercice 6.5. *Montrer que la dimension de $\mathbb{R}$, comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, est infinie. Indication : utiliser le fait que le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable (un ensemble est dit* dénombrable *s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$).*

6.2 Applications linéaires

Comme pour la dimension finie, une application linéaire est définie entièrement par les images des éléments d'une base, et pour tout choix de ces images, il y a une unique application linéaire.

6.3 Non isomorphisme de l'espace et de son bidual

Théorème 6.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension infinie. L'application linéaire canonique $\theta : E \to E^{**}$ est injective et n'est pas surjective.*

Démonstration. Soit B une base, vue comme une partie de E. Pour tout $b \in B$, on considère la forme linéaire b^* sur E qui envoie chaque x dans B sur δ_{bx}. On montre que les b^*, $b \in B$, sont linéairement indépendants.

On peut compléter la partie linéairement indépendante $\{b^* \mid b \in B\}$ de E^* en une base de E^*. Considérons une forme linéaire u sur E^* telle que $u(b^*) = 1$ pour tout $b \in B$.

Montrons par l'absurde qu'il n'y a pas de $e \in E$ tel que $\theta(e) = u$. Sinon, en écrivant $e = \sum_{b \in B} a_b b$, avec des a_b presque tous nuls, choisissons $x \in B$ tel que $a_x = 0$ (il existe car B est infini et les a_b presque tous nuls). Alors $1 = u(x^*) = \theta(e)(x^*) = x^*(e) = x^*(\sum_{b \in B} a_b b) = \sum_{b \in B} a_b x^*(b) = \sum_{b \in B} a_b \delta_{xb} = a_x = 0$, contradiction. □

7 Compléments sur les espaces vectoriels : corps non commutatif

On considère ici un corps $\mathbb{K}$ non nécessairement commutatif. Il faut alors préciser si l'espace vectoriel est à gauche ou à droite sur $\mathbb{K}$: on écrit l'action de $\mathbb{K}$ sous la forme va (v le vecteur, a le scalaire) si c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel à droite.

La démonstration de l'existence des bases est en tout point semblable au cas des corps commutatifs, ainsi que celle de la dimension. Une application linéaire entre espaces vectoriels, tous deux à droite, satisfait les conditions usuelles.

Pour les matrices des applications linéaires (en dimension finie), il faut faire attention. Commençons par un exemple. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{K}$ à droite : le produit externe est le produit de $\mathbb{K}$: $v \in \mathbb{K}$ (le vecteur), $a \in \mathbb{K}$ (le scalaire) ; le produit externe est va.

Considérons une application linéaire $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ pour cette structure d'espace vectoriel à droite : elle doit satisfaire $f(va) = f(v)a$.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre eux espaces vectoriels à droite ($f(ea) = f(e)a$). Avec des bases respectives $e_1, \dots, e_p$, $f_1, \dots, f_n$, on définit sa matrice $[a_{ij}]$ comme dans le cas commutatif par $u(e_j) = \sum_i f_i a_{ij}$.

Les vecteurs-lignes d'une matrice $n \times p$ sont donc éléments de $\mathbb{K}^{1\times p}$, espace vectoriel à gauche, alors que les vecteurs-colonnes sont éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{n\times 1}$, espace vectoriel à droite [1]. Avec ces conventions, on a le résultat suivant.

Théorème 7.1. *Le rang des vecteurs-lignes d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes.*

On appellera donc *rang* d'une matrice ce nombre.

Démonstration. Première preuve : L'algorithme de Gauss-Jordan s'applique tout-à-fait, avec la précaution que les multiplications d'une ligne par un scalaire se font par la gauche. Il est facile de vérifier que le sous-espace engendré par les lignes est invariant tout au cours de l'algorithme. On obtient donc que le rang des lignes est égal au nombre de pivots de la matrice l-réduite échelonnée.

Maintenant, il est vrai aussi que si cette dernière est notée N et si M est la matrice de départ, alors $N = PM$ pour une certaine matrice inversible. Ceci implique que l'espace à droite des colonnes de N est l'image par un isomorphisme de l'espace des colonnes de M. Ils ont donc même dimension, qui est le rang des colonnes de M. On vérifie enfin que l'espace des colonnes de N est égal à l'espace engendré par les $e_1, \dots, e_k$ (où les e_i forment la base canonique de l'espace de toutes les colonnes sur $\mathbb{K}$), où k est le nombre de lignes non nulles de N, c'est-à-dire le nombre de pivots (voir [1] 12.6).

Deuxième preuve : on montre que le rang des vecteurs-colonnes de $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est égal au plus petit r tel que $M = PQ$, pour des matrices $P \in \mathbb{K}^{n\times r}$ et $Q \in \mathbb{K}^{r\times n}$. A cause de la symétrie de cette propriété, c'est aussi le rang des vecteurs-lignes de M. $\square$

Ce qui ne marche pas :

(i) la formule du produit des transposées de deux matrices ; ce n'est déjà pas vrai en dimension 1 !

(ii) Il n'y a pas de théorie des déterminants, qui seraient des fonctions polynomiales (non commutatives) des coefficients de la matrice.

(iii) L'égalité des rang d'une matrice et de sa transposée (voir exercice 7.2).

1. Une manière de comprendre ceci est de considérer les scalaires comme des matrices de taille 1×1 et de respecter les compatibilités dans les produits de matrices

(iv) L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ n'est pas un espace vectoriel en général. Cependant, si E est un espace vectoriel à droite, son dual $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel à gauche. Par exemple, les vecteurs colonnes forment naturellement un espace vectoriel à gauche et leur dual est l'espace des lignes, qui forment naturellement un espace vectoriel à gauche.

Exercice 7.1. *Montrer que si $\mathbb{K}$ est commutatif, tout espace vectoriel à gauche sur $\mathbb{K}$ l'est aussi à droite, et réciproquement. Quel est parmi les huit axiomes des espaces vectoriels (voir [1]) celui qui fait que ceci n'est pas vrai lorsque $\mathbb{K}$ est non commutatif ?*

Exercice 7.2. *Montrer par une contre-exemple que le rang d'une matrice 2×2 n'est pas toujours égal au rang de sa transposée. Indication : considérer la matrice* $\begin{bmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{bmatrix}$.

8 Modules sur un anneau

8.1 Définitions et exemples

Soit $\mathbb{A}$ un anneau non nécessairement commutatif. Un $\mathbb{A}$-*module à droite* est un groupe abélien M avec une opération externe $M \times A \to M$, $(m,a) \mapsto ma$ avec les axiomes :

(i) $m(ab) = (ma)b$;

(ii) $m1_{\mathbb{A}} = m$;

(iii) $m(a+b) = ma + mb$;

(iv) $(m+m')a = ma + m'a$;

pour tous les $m, m' \in M$ et $a, b \in \mathbb{A}$.

Les *modules à gauche* sont définis de manière analogues. Lorsque l'anneau est commutatif, un module à droite est aussi un module à gauche (voir les exercices 8.1 et 8.2).

Lorsque $\mathbb{A}$ est un corps, les $\mathbb{A}$-modules à droite sont les espaces vectoriels à droite sur $\mathbb{A}$.

Un exemple de module à droite est le suivant : soit $M = \mathbb{A}^n$ les vecteurs-lignes de longueur n sur $\mathbb{A}$. C'est un module à droite sur l'anneau des matrices carrées d'ordre n ; la loi externe est le produit matriciel d'un vecteur ligne par une telle matrice.

De même, l'ensemble des vecteurs colonnes sur $\mathbb{A}$ est un module à gauche sur l'anneau de ces matrices.

L'anneau $\mathbb{A}$ est un module à gauche, et aussi un module à droite, sur lui-même.

Un groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module, et réciproquement.

Les *sous-modules* sont définis de manière évidente. Pour la structure de $\mathbb{A}$-module à droite de $\mathbb{A}$, les sous-modules sont les idéaux à droite. Les sous-modules des $\mathbb{Z}$-modules (= groupes abéliens) sont les sous-groupes.

Les *homomorphismes de modules*, appelés aussi *applications linéaires*, sont des fonctions qui préservent l'addition et la produit externe. Pour un tel homomorphisme, on doit avoir, dans le cas des modules à droite

$$f(ma) = f(m)a.$$

Le *noyau* se définit comme on pense par $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(0)$. Sa propriété de base est que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = 0.$$

Le quotient d'un module par un sous-module se définit d'abord comme groupe abélien, puis la loi externe y est définie. Il n'y a pas vraiment de différence dans les preuves, par rapport aux espaces vectoriels.

Propriété universelle du quotient : Soient M, N des modules et $f : M \to N$ un homomorphisme de modules. Il existe une unique application linéaire $\bar{f} : M/\operatorname{Ker}(f) \to N$ telle que $f = \bar{f} \circ p$, où p est la projection canonique $M \to M/\operatorname{Ker}(f)$.

Le *produit cartésien* d'une famille de modules $(M_i)_{i\in I}$ est, en tant qu'en semble eur produit cartésien $\prod_{i\in I} M_i$, avec somme et produit externe définis composante par composante.

La *somme directe* de cette famille est le sous-module du produit cartésien des I-uplets dont le support est fini. Il est noté $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

Exercice 8.1. *Montrer que si M est un module à droite sur l'anneau commutatif $\mathbb{A}$, alors la loi externe $\mathbb{A} \times M \to M, (a, m) \mapsto ma$ en fait un $\mathbb{A}$-module à gauche. Quel est le seul axiome à vérifier ? Pourquoi ça ne marche pas quand $\mathbb{A}$ n'est pas supposé commutatif ?*

Exercice 8.2. *Montrer que si M est un $\mathbb{A}$-module à droite, alors M est aussi un $\mathbb{A}^{op}$-module à gauche sur l'anneau opposé $\mathbb{A}^{op}$, dont la multiplication est $(a, b) \mapsto ba$.*

Exercice 8.3. *Soit M un module à droite. Montrer que l'ensemble des homomorphismes $M \to \mathbb{A}$ est naturellement un module à gauche sur $\mathbb{A}$, son dual. Avec $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, montrer que son dual est nul.*

8.2 Combinaisons linéaires, bases et modules libres

Une *combinaison linéaire* dans un $\mathbb{A}$-module à droite M est définie de manière tout-à-fait analogue au cas des espaces vectoriels : $m_1a_1+\cdots+m_ka_k$. On pourra donc parler de vecteurs linéairement indépendants, etc...

Notons ce qui ne marche pas dans les modules, comparés aux espaces vectoriels : si des vecteurs sont linéairement dépendants $m_1a_1+\cdots+m_ka_k=0$, alors il n'est pas vrai en général que l'un d'eux soit linéairement dépendants des autres ; car on peut bien écrire $m_1a_1=-\sum_{2\le i\le k}m_ia_i$ en supposant par exemple que a_1 est non nul, mais on ne pourra pas multiplier à droite par a_1^{-1}, car dans un anneau, un élément non nul n'est pas forcément inversible. De cette impossibilité, découle l'inexistence des bases dans un module en général.

Un module est dit *finiment engendré*, ou *de type fini*, s'il existe un nombre fini de vecteurs qui l'engendrent, c'est-à-dire que tout vecteur dans le module en est une combinaison linéaire.

Un module est dit *libre* s'il a une base. Une *base* est un ensemble de vecteurs tel que tout vecteur dans le module est combinaison linéaire de manière unique des vecteurs de la base.

Propriété universelle des bases : toute fonction de la base vers un module se prolonge de manière unique en une application linéaire.

Conséquence : tout module finiment engendré est quotient d'un module libre de rang fini.

Lorsque l'anneau $\mathbb{A}$ est commutatif, toutes les bases d'un module libre ont la même cardinalité ; une preuve possible passe par les déterminants : on montre que si on a une base avec n éléments, alors il existe une forme n-linéaire alternée non nul (déterminée par le déterminant), et que toute forme p-linéaire avec $p>n$ est nulle (voir exercice 8.4). On l'appelle le *rang* du module (et non dimension, pour des raisons qui m'échappent).

Il existe des anneaux non commutatifs et des modules libres sur ces anneaux tels qu'on n'a pas unicité des cardinalités des bases des modules libres.

Ce qui ne marche pas non plus, c'est qu'on peut avoir un module libre de rang n, et un sous-module propre, qui est un module libre, et aussi de rang n. Un exemple simple est $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$, avec $\mathbb{A}=\mathbb{Z}$.

Pour une application linéaire $f:M\to V$ entre modules libres, avec bases respectives $m_1,\ldots,m_p$ et $v_1,\ldots,v_n$, on définit sa matrice $A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$ par la formule usuelle

$$f(m_j)=\sum_{1\le i\le n}v_ia_{ij}.$$

Si on représente les vecteurs dans ses base par des vecteurs colonnes, on a la formule usuelle

$$Y = MX, \tag{2}$$

X et Y étant les vecteurs colonnes associés à $x \in M$, $y = f(x) \in V$, avec donc $X = {}^t(x_1, \ldots x_p)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ et

$$X = \sum_i v_i x_i, Y = \sum_i v_i y_i.$$

Remarquez qu'on a choisi ici des modules à droite pour obtenir les formules usuelles. Pour des modules à gauche, ce sont des vecteurs-lignes qu'il faut employer, et il faut modifier aussi la définition de la matrice d'une application linéaire, en échangeant lignes et colonnes.

Exercice 8.4. *Montrer que si $\mathbb{A}$ est commutatif, alors le déterminant d'une matrice, vu comme une fonction $(\mathbb{A}^n)^n$ dans $\mathbb{A}$, est une forme n-linéaire alternée, où les lignes de la matrice sont vues comme des éléments de $\mathbb{A}^n$; montrer que cette forme est non nulle. Montrer que si $p > n$, alors toute forme p-linéaire alternée sur $\mathbb{A}^n$ est nulle. En déduire que les cardinalités des bases d'un $\mathbb{A}$-module libre finiment engendré sont égales.*

Exercice 8.5. *Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes, pour anneau (non nécessairement commutatif $\mathbb{A}$) :*

(i) Pour chaque module libre, toutes ses bases ont même cardinalité.

(ii) Toute matrice inversible sur $\mathbb{A}$ est carrée (précisément : si $M \in M_{np}(\mathbb{A})$ et $N \in M_{pn}(\mathbb{A})$ et si $MN = I_n$, $NM = I_p$, alors $p = n$).

Exercice 8.6. *Donner les définitions adéquates de matrices d'une application linéaire entre modules à gauche libres, ainsi que pour celles des vecteurs-lignes associés aux vecteurs, et donner la formule remplaçant l'équation (2) et sa preuve.*

Exercice 8.7. *Montrer que si l'anneau est infini, alors tout module libre non trivial est infini. En déduire l'existence de $\mathbb{Z}$-modules qui ne sont pas libres.*

8.3 Torsion

Soit M un module à droite. L'*annulateur* $\{a \in \mathbb{A} \mid ma = 0\}$ d'un élément $m \in M$ est un idéal à droite de $\mathbb{A}$. L'*annulateur* $\{a \in \mathbb{A} \mid Na = 0\}$ d'un sous-module N de M est un idéal bilatère de $\mathbb{A}$.

Un module est *sans torsion* si l'annulateur de tout élément est nul ; de manière équivalente, l'annulateur de M est nul. Au contraire, on dit qu'un module est *de torsion* si tout élément a un annulateur non nul.

Tout module libre est sans torsion, faire l'exercice 8.8.

Exercice 8.8. *Montrer que tout module libre est sans torsion. En déduire l'existence de $\mathbb{Z}$-modules non libres, et plus généralement, pour tout anneau commutatif qui n'est pas un corps (utiliser un quotient de l'anneau).*

9 Modules sur un anneau commutatif principal intègre

On considère dans ce chapitre un *anneau commutatif intègre et principal* $\mathbb{A}$: tout idéal de $\mathbb{A}$ est engendré par un élément, donc est de la forme $a\mathbb{A}$, $a \in \mathbb{A}$. Les exemples typiques sont $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}$ corps commutatif. Les modules seront notés à gauche.

Exercice 9.1. *Montrer qu'un anneau commutatif, vu comme module sur lui-même, est un module libre, si et seulement si c'est un anneau est principal.*

Exercice 9.2. *Montrer que l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x n'est pas principal. En déduire que $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas un anneau principal.*

9.1 Mise sous forme diagonale des matrices sur $\mathbb{A}$

On considère les opérations de lignes et de colonnes sur les matrices à coefficients dans $\mathbb{A}$. Les *opérations de lignes* sont de trois sortes :

(i) échanger les lignes i et j, opération notée (ij) ;

(ii) multiplier la ligne i par un scalaire a inversible. Notation : aL_i ;

(iii) ajouter à la ligne i la ligne j multipliée par a, avec $i \neq j$; Notation : $L_i + aL_j$.

Les *opérations de colonnes* sont similaires, et notées avec des C.

Théorème 9.1. *Soit M une matrice à coefficients dans $\mathbb{A}$. Par des opérations de lignes et de colonnes, on peut transformer M en une matrice de la forme*

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

où $r \geq 0$, les d_i sont des éléments non nuls de $\mathbb{A}$ avec $d_1|d_2|\cdots|d_r$.

On appellera qu'une matrice est sous *forme diagonale* si elle a cette forme, avec la condition sur la divisibilité. On appelle *diviseurs principaux* les éléments $d_1, \ldots, d_r$.

La preuve ci-dessous donne un algorithme pour mettre la matrice sous forme diagonale ; dans la pratique, on n'a pas besoin de suivre strictement cet algorithme, et l'algorithme est très rapide (du moins sur $\mathbb{Z}$) ; cela vient du fait que l'algorithme euclidien est rapide (de basse complexité).

Démonstration. Nous ne prouvons ce théorème que dans le cas $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, avec la propriété supplémentaire que les d_i sont des entiers naturels. Le cas général n'est pas très différent, mais l'avantage de travailler avec les entiers, c'est que chaque idéal de $\mathbb{Z}$ est engendré par un unique entier naturel, et qu'on pourra faire une récurrence facile sur ceux-ci.

On peut supposer M non nulle. On va montrer qu'on peut transformer M par des opérations lignes et de colonnes en une matrice ayant la forme par blocs

$$\begin{pmatrix} d_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}, \tag{4}$$

où d_1 est un entier naturel non nul qui divise chaque coefficient de la matrice B (les 0 en gras représentent des matrices lignes et colonnes de la taille appropriée). Par hypothèse de récurrence (sur la taille de la matrice), ce sera suffisant ; en effet, si les coefficients d'une matrice sont divisibles par un entier a, cette propriété est préservée par opérations de lignes et de colonnes.

1. Par permutation de lignes et de colonnes, et par multiplication par -1 au besoin, on peut se ramener à $m_{11} > 0$, et à $m_{11} \leq |m_{ij}|$ pour tous i, j tels que m_{ij} est non nul.

2. Dans la suite de l'algorithme, $|m_1 1|$ n'augmentera pas. A chaque étape de cet algorithme, si la matrice obtenue a un coefficient non nul de valeur absolue plus petite que son coefficient $1, 1$, on retournera à l'étape 1. Cela ne peut se produire qu'un nombre fini de fois.

3. On choisit dans la première colonne un coefficient m_{i1}, avec $i > 1$, et on fait la division euclidienne par m_{11} : $m_{i1} = m_{11}q + r_i$, $0 \leq r_i \leq m_{11}$. On fait l'opération de lignes $L_i - qL_1$, ce qui a pour effet de remplacer m_{i1} par r_i. Si $r_i \neq 0$, on retourne à l'étape 1. Si $r_i = 0$, on prend un autre i. En

répétant cette procédure, on obtient comme première colonne

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. On fait de même pour la première ligne, avec des opérations de colonnes, ce qui ne modifie pas la première colonne déjà obtenue. On est alors ramené à la forme (4), mais avec la possibilité qu'un coefficient b de B ne soit pas divisible par m_{11}, et on peut se ramener à $b > 0$. On ajoute alors la colonne de b à la première et on obtient comme première colonne

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix},$$

avec b sur la ligne i. On retourne à l'étape 3 avec ce i, ce qui a pour effet de remplacer m_{i1} par r_i avec $0 < r_i < m_{11}$, et on retourne à l'étape 1. □

Définition 9.1. *On appelle groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{A}$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathbb{A}^{n \times n}$. Notation : $GL_n(\mathbb{A})$.*

Une matrice est dans $GL_n(A)$ si et seulement si son déterminant est inversible dans $\mathbb{A}$.

Corollaire 9.1. *Soit M une matrice de taille $n \times p$. Il existe des matrices $P \in GL_n(\mathbb{A})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{A})$ telles que PMQ soit sous forme diagonale.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les opérations de colonnes sont simulées par des multiplications par la gauche par des matrices inversibles, et semblablement pour les colonnes. Ceci est tout-à-fait semblable au cas où l'anneau est le corps des réels, voir par exemple [1] Proposition 12.5. □

Exercice 9.3. *Mettre sous forme diagonale les matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.2 Unicité de la forme diagonale

Théorème 9.2. *La forme diagonale du théorème 9.1 est unique. De manière précise, r est le rang de la matrice dans le corps des fractions de $\mathbb{A}$ et les idéaux $d_i\mathbb{A}$ sont complètement déterminés par la matrice : $d_i\mathbb{A}$ est l'idéal engendré par les mineurs d'ordre i de la matrice.*

On peut aussi dire que les éléments d_i sont déterminés à association près : a, b dans $\mathbb{A}$ sont *associés* si et seulement si $a\mathbb{A} = b\mathbb{A}$ si et seulement s'il exste $u \in A$ inversible tel que $a = ub$.

Exemple 9.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le 1-mineurs engendrent $\mathbb{Z}$ et le 2-mineur est 5.

Notons $H_i(M)$ l'idéal engendré par les i-mineurs de M.

Démonstration. 1. Le rang d'une matrice ne change pas après opération de lignes ou de colonnes, d'après le corollaire 9.1. De plus, le rang de la matrice sous la forme diagonale du théorème 9.1 est r. Ceci prouve l'assertion sur le rang.

2. Nous montrons que lors d'une opération élémentaire de lignes ou de colonnes $M \to M'$, on a $H_i(M) = H_i(M')$. On peut déjà s'en convaincre pour les 1-mineurs : le cas le moins facile est une opération de lignes $L_i + aL_j$ (pour les colonnes c'est analogue) ; dans ce cas $m'_{ik} = m_{ik} + am_{jk}$ et les autres m_{sk} sont inchangés, en particulier les m_{jk}, ce qui implique que l'idéal engendré par les coefficients de la matrice est inchangé.

Regardons le cas $i = 2$, auquel nous nous restreindrons, pour simplifier. Une opération de lignes (ij) laisse les 2-mineurs globalement invariants, sauf à multiplier certain d'entre eux par -1. Une opération aL_i laisse certains mineurs invariants et multiple certains d'entre eux pas l'élément inversible a. Considérons une opération de lignes $L_i + \alpha L_j$, et nous prenons $i = 1, j = 2$ pour simplifier ; les 2-mineurs sont inchangés, sauf s'ils sont logés dans les lignes 1 et k, $k \geq 3$, et nous prenons $k = 3$ pour simplifier. On a alors

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ c & d & \cdots \\ e & f & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \to M' = \begin{pmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d & \cdots \\ c & d & \cdots \\ e & f & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le 2-mineur de M' logé en les lignes 1 et 3, et dans les deux premières colonnes (pour simplifier, les autres cas sont similaires) est

$$\begin{vmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix},$$

ce qui implique que $H_2(M) = H_2(M')$.

3. Nous montrons maintenant que si M est sous la forme diagonale du théorème 9.1, alors $H_i(M) = d_1 \cdots d_i \mathbb{A}$ pour $i = 1, \ldots, r$. On voit en effet que les seuls mineurs non nuls de cette matrice sont les mineurs principaux, c'est-à-dire, dont la diagonale sur la diagonal principale de M. Un tel mineur, s'il est d'ordre i, est, par la propriété de divisibilité, un multiple de $d_1 \cdots, d_i$. Donc $H_i(M) = d_1 \cdots d_i \mathbb{A}$ dans ce cas.

4. Le théorème découle des trois parties précédentes. □

Exercice 9.4. *Retrouver les formes diagonales des matrices de l'exercice 9.3 en utilisant le théorème 9.2.*

Exercice 9.5. *Montrer qu'une matrice carrée sur $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si sa forme diagonale est l'identité.*

Exercice 9.6. *Une matrice élémentaire sur $\mathbb{A}$ est une matrice obtenue par une opération de lignes à partir d'une matrice identité. Montrer que la définition est équivalente si on remplace "lignes" par "colonnes". Montrer que toute matrice inversible sur $\mathbb{A}$ est un produit de matrices élémentaires.*

Exercice 9.7. *Utiliser la mise sous forme diagonale pour résoudre sur $\mathbb{A}$ un système d'équations linéaires sur $\mathbb{A}$.*

9.3 Sous-modules de $\mathbb{A}^p$

Théorème 9.3. *Pour tout sous-module H d'un $\mathbb{A}$-module L libre de rang p, il existe une base $x_1, \ldots, x_p$ de L, $r \geq 0$, et des éléments $d_1, \ldots, d_r$ non nuls de $\mathbb{A}$ tels que $d_1|d_2|\cdots|d_r$, et que $d_1x_1, \ldots, d_rx_r$ est une base de H.*

Lemme 9.1. *Soit H un sous-module de $\mathbb{A}^p$. Il est finiment engendré.*

Démonstration. Si $p = 0$, c'est clair, car $\mathbb{A}^0 = \{0\}$. Supposons $p \geq 1$. Soit $\pi : \mathbb{A}^p \to \mathbb{A}$ la première projection. Alors $\pi(H)$ est un sous-module de $\mathbb{A}$, c'est-à dire un idéal, donc $\pi(H) = a\mathbb{A}$, $a \in \mathbb{A}$. Soit $y \in H$ tel que $\pi(y) = a$.

Par hypothèse de récurrence, $H' = H \cap \{0\} \times \mathbb{A}^{p-1}$ est finiment engendré, car $\{0\} \times \mathbb{A}^{p-1}$ est isomorphe à $\mathbb{A}^{p-1}$.

Nous montrons que y et H' engendrent H, et ça suffira pour montrer que H est finiment engendré. Soit $x \in H$. Alors il existe $b \in \mathbb{A}$ tel que $p(x) = ba$. Alors $p(x - by) = p(x) - bp(y) = ba - ba = 0$. Donc $z = x - by \in H'$, et comme $x = by + z$, nous avons prouvé que y et H' engendrent M. □

Etant donnée une matrice M de taille $n \times p$ sur $\mathbb{A}$, et une base $x_1, \dots x_p$ d'un module libre L, nous notons $K(M, x)$ le sous-module de $\mathbb{A}^p$ engendré par les vecteurs dont les lignes de M sont les coefficients de ces vecteurs dans cette base.

Lemme 9.2. *Soit $M \to N$ une opération de lignes ou de colonnes de. Si c'est une transformation de lignes, alors $K(M, x) = K(N, x)$. Si c'est une transformation de colonnes, alors il existe une base $y_1, \dots, y_p$ de L telle que $K(M, x) = K(N, y)$.*

Démonstration. Par définition, $K(M, x)$ est engendré par les n vecteurs $v_i = \sum_j m_{ij} x_j$, $i = 1 \dots, n$, correspondant aux n lignes de M.

Clairement, si on échange deux lignes, $K(M, x) = K(N, x)$, car on échnage simplement v_i et v_j parmi les générateurs du sous-module ; si on multiplie une ligne par a inversible, on a clairement l'égalité, car l'un des v_i est multiplié par a ; enfin une opération de lignes $L_i + aL_j$ revient à remplacer v_i par $v_i + av_j$, les autres v_k restant inchangés, et on a donc toujours l'égalité.

Passons aux opérations de colonnes. Si c'est une opération (i, j), alors on prend comme nouvelle base la base obtenue en échangeant x_i et x_j. Si c'est une opération aC_i, a inversible, on remplace x_i par $a^{-1} x_i$. Si c'est une opération $L_s + aL_t$, on remplace x_t par $x_t - ax_s$, les autres inchangés, et ça marche, car $m_{is} x_s + m_{it} x_t = (m_{is} + am_{it}) x_s + m_{it}(x_t - ax_s)$.

□

Preuve du théorème 9.3. Le module libre L de rang p est isomorphe à $\mathbb{A}^p$. Nous savons donc grâce au lemme 9.1 que H a un système générateur fini. Choisissons une base $x_1, \dots, x_p$ de L. Prenons ces générateurs et définissons une matrice M dont les n lignes sont les coefficients de ces générateurs dans la base de L choisie ; M est alors une matrice $n \times p$ sur $\mathbb{A}$. Les lignes de M engendrent le sous-module H. On a donc $H = K(M, x)$.

On applique alors itérativement le lemme précédent, et la mise sous forme diagonale de N, et on trouve une base $y_1, \dots, y_p$ de L, telle $K(N, y) = H$. Si $d_1, \dots, d_r$ désignent les diviseurs principaux, on trouve que $d_1 y_1, \dots d_r y_r$ engendrent H, et ils en forment une base, puisqu'ils ont linéairement indépendants, car $\mathbb{A}$ est intègre. □

Corollaire 9.2. *Tout sous-module d'un $\mathbb{A}$-module libre finiment engendré d'un module libre de rang p est un module libre de rang $\leq p$.*

On notera que, réciproquement, si un anneau satisfait à la propriété du corollaire, alors il est nécessairement principal.

Exercice 9.8. *Montrer que si f est une application linéaire d'un $\mathbb{A}$-module libre M vers un autre N, tous deux finiment engendrés, alors il existe une base $m_1, \ldots, m_p$ de M et une base $n_1, \ldots, n_l$ de N, telles que $f(m_i) = d_i n_i$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $f(n_i) = 0$ pour $i > r$, où les d_i sont des scalaires non nuls et $d_1|d_2| \ldots |d_r$.*

Exercice 9.9. *Trouver une base du sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$ engendré par $(1, 0, -1), (2, -3, 1), (0, 3, 1)$ et $(3, 1, 5)$.*

9.4 Structure des $\mathbb{A}$-modules finiment engendrés

Théorème 9.4. *Tout $\mathbb{A}$-module finiment engendré M est isomorphe à un module de la forme*

$$\mathbb{A}^s \times \mathbb{A}/c_1\mathbb{A} \times \cdots \times \mathbb{A}/c_t\mathbb{A}, \tag{5}$$

où $s, t \in \mathbb{N}$, et où les $c_i \in \mathbb{A}$ sont non nuls, non inversibles, et satisfont $c_1| \cdots |c_t$.

Démonstration. Supposons que M soit engendré par p vecteurs. Il existe un module libre de rang p, un homomorphisme surjectif de $\mathbb{A}$-modules $\pi : L \to M$. Alors M est isomorphe à L/H où $H = \mathrm{Ker}(\pi)$. Il existe une base $x_1, \ldots, x_p$ de $L, r \in \mathbb{N}$, et des éléments non nuls $d_1, \ldots, d_r$ tels que $d_1| \cdots |d_r$ et que $d_1x_1, \ldots, d_rx_r$ est une base de H. Par isomorphisme, on est ramené à $L = \mathbb{A}^p$ et que H est le sous-module engendré par $d_1e_1, \ldots, d_re_r$, où les e_i forment la base canonique de $\mathbb{A}^p$ (voir exercice 9.10).

Donc M est isomorphe à $N = A^p/(d_1\mathbb{A}) \times \cdots (d_r\mathbb{A}) \cdots \{0\}^{p-r}$. Considérons l'homomorphisme canonique de $\mathbb{A}$-modules

$$\varphi : \mathbb{A}^p \to \mathbb{A}/d_1\mathbb{A} \times \cdots \times \mathbb{A}/d_r\mathbb{A} \times \mathbb{A}^{p-r}.$$

Son noyau est $(d_1\mathbb{A}) \times \cdots (d_r\mathbb{A}) \cdots \{0\}^{p-r}$, c'est-à-dire H. Donc M est isomorphe N.

Il suffit pour conclure de voir que si d_i est inversible, alors $d_i\mathbb{A} = \mathbb{A}$ et donc $\mathbb{A}/d_i\mathbb{A} = \{0\}$. De plus, si d_i non inversible, alors ses multiples ne le sont pas non plus. Il existe donc k tels que $d_1, \ldots, d_k$ sont inversibles et $d - k + 1, \ldots, d_r$ ne le sont pas. On posera donc $t = r - k$, $s = p - r$, $c_1 = d_{k+1}, \ldots, c_t = d_r$. □

Corollaire 9.3. *Tout module finiment engendré sans torsion est libre.*

Rappelons qu'un élément p de $\mathbb{A}$ est dit *irréductible* s'il n'est pas nul ni inversible, et si toute factorisation $p = qr$ dans $\mathbb{A}$ implique que q ou r est inversible.

Corollaire 9.4. *Tout module finiment engendré est isomorphe à un produit d'un module libre par un produit de modules de la forme $\mathbb{A}/p^k\mathbb{A}$, p irréductible dans $\mathbb{A}$, $k \geq 1$.*

Lemme 9.3. *(Théorème chinois) Si $c = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, où les p_i sont irréductibles et distincts dans $\mathbb{A}$ et où les k_i sont ≥ 1, alors*

$$\mathbb{A}/c\mathbb{A} \simeq \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{A}/p_i^{k_i}\mathbb{A}.$$

Exercice 9.10. *Montrer que si on a un isomorphisme de modules $L_1 \to L_2$, qui envoie le sous-module H_1 sur H_2, alors il induit un isomorphisme $L_1/H_1 \to L_2/H_2$.*

9.5 Unicité de cette structure

Théorème 9.5. *Dans le théorème 9.4, s, t et les idéaux $c_i\mathbb{A}$ ne dépendent que du module M.*

Exercice 9.11. *Montrer que $\{m \in M \mid \exists a \in \mathbb{A}, a \neq 0, am = 0\}$ est un sous-module du module M.*

9.6 Application 1 : groupes abéliens finiment engendrés

On prend $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$-modules = groupes abéliens, on obtient le

Théorème 9.6. *Soit G un groupe abélien finiment engendré.*

(i) $G \simeq L \times G_*$, où L est libre de rang fini et G_* est fini.

(i) Il existe des entiers $t \geq 0$ et $2 \leq c_1|c-2|\ldots|c_t$, entièrement déterminés par la classe d'isomorphisme de G, tels que

$$G_* \simeq \prod_{1 \leq i \leq t} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}.$$

(ii) Il existe un multi-ensemble fini F de puissances non triviales de nombres premiers, entièrement déterminé par la classe d'isomorphisme de G, tel que

$$G_* \simeq \prod_{p^k \in P} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}.$$

(iii) G est libre si et seulement s'il est sans torsion.

Exercice 9.12. *Trouver les classes d'isomorphisme des groupes abéliens d'ordre 400.*

Exercice 9.13. *A quelle condition un groupe abélien fini contient-il un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? A $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?*

Exercice 9.14. *Si G est comme dans (5), avec $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, quel est l'ordre maximum d'un élément de G ?*

Exercice 9.15. *Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$, de rang 2, a une unique base de la forme $(a, 0), (c, d)$, où a, c, d sont des entiers avec $a, d > 0$ et $0 \leq c < a$. Montrer que l'index du sous-groupe (c'est-à-dire la cardinalité du quotient) est ad. Montrer que le nombre de sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$ d'index n est égal à la somme des diviseurs de n.*

9.7 Application 2 : réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel

On prend

$$\mathbb{A} = \mathbb{K}[x],$$

où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif. On considère dans la suite un espace vectoriel V fixé sur $\mathbb{K}$ et un endomorphisme fixé f de V. Rappelons la notation $P(f)$ si $P \in \mathbb{K}[x]$, obtenue en remplaçant x par f dans le polynôme P. Alors $P(f)$ désigne un endomorphisme de V.

L'espace V devient un $\mathbb{A}$-module par l'action $Pv = P(f)(v)$, $P \in \mathbb{A}, \in V$. Notons que la structure d,espace vectoriel de V s'obtient de sa structure de $\mathbb{A}$-module en restreignant l'opération externe de celui-ci au sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{A}$. Autrement dit, si P est un polynôme constant, la notation Pv désigne le produit externe, dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, du scalaire $P \in \mathbb{K}$ par le vecteur v.

Le $\mathbb{A}$-module V est un module de torsion, car les endomorphismes $f^n, n \in \mathbb{N}$ ne peuvent pas être linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$. En fait, par le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est dans l'annulateur de tout $v \in V$; en fait, $P(f) = 0$ si P est le polynôme caractéristique

Il existe un polynôme P, de coefficient dominant 1, de degré minimum, tel que $P(f) = 0$, et c'est le polynôme minimal de f. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, et il est le générateur de l'idéal de $\mathbb{A}$

formé de polynômes qui sont dans l'annulateur de tous les éléments de V. Voir le cours d'algèbre linéaire 2 [2].

Rappelons qu'un espace vectoriel est dit *cyclique* sous l'action de f s'il existe $v \in V$ tel que les $f^n(v)$ engendrent V comme espace vectoriel. Autrement dit, V est un $\mathbb{A}$-module cyclique (ou monogène).

Théorème 9.7. *Si V est cyclique, alors le polynôme minimal de f est égal à son polynôme caractéristique, soit P, et V comme $\mathbb{A}$-module est isomorphe à $\mathbb{A}/P\mathbb{A}$. Modulo cet isomorphisme, V a pour base les classes de $1, x, \ldots, x^{n-1}$, $\deg(P) = n$. Si $P = x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_0$, alors l'action de f sur V est entièrement décrite sur cette base par $1 \to x, x \to x^2, \ldots, x^{n-2} \to x^{n-1}, x^{n-1} \to a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$; autrement dit , la matrice de f dans cette base est la matrice compagne de P.*

Voir [2], chapitre 16. Appelons *diviseur* ce polynôme P, dans le cas où V est cyclique sous l'action de f ; c'est un polynôme non constant (en excluant le cas où $V = 0$).

En général, un espace vectoriel n'est pas cyclique, mais on a le résultat suivant, dont la première assertion découle immédiatement du théorème 9.4

Théorème 9.8. *L'espace V est une somme directe de sous-espaces cycliques, avec diviseurs $P_1 | P_2 | \cdots | P_k$. Ceux-ci sont uniquement déterminés par f, si on les prend unitaires. De plus, P_k est le polynôme minimal de f et son polynôme caractéristique est $P_1 \cdots P_k$.*

On appellera *invariants* de f les polynômes $P_1, \ldots, P_k$. On peut aussi déduire la forme de Jordan du Corollaire 9.4.

Corollaire 9.5. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, il existe une base de Jordan pour f.*

Démonstration. D'après le corollaire cité, le $\mathbb{A}$-module V est somme directe se $\mathbb{A}$-modules de la forme $\mathbb{A}/(x-\lambda)^k\mathbb{A}$, puisque les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[x]$ sont de degré 1. Ce dernier $\mathbb{K}$-espace vectoriel a pour base $e_1 = 1, e_2 = x - \lambda, \ldots, e_k = (x-\lambda)^{k-1}$ modulo $x - \lambda$. Et on a modulo $(x-\lambda)^k$: $xe_1 = x = x - \lambda + \lambda = e_2 + \lambda e_1$, $xe_2 = x(x - \lambda_2) = (x-\lambda)^2 + \lambda(x-\lambda) = e_3 + \lambda e_2$, $\ldots$, $xe_k = x(x-\lambda)^{k-1} = (x-\lambda)^k + \lambda(x-\lambda)^{k-1} = \lambda e_k$. Ce qui domne un bloc de Jordan d'ordre k avec valeur propre λ. $\square$

On peut calculer les diviseurs de f de la manière suivante.

Théorème 9.9. *Soit M la matrice de f dans une base $v_1, \ldots, v_n$ de V, de dimension n. Les invariants de f sont les diviseurs non constants de la matrice $xI_n - M$.*

Démonstration. 1. Considérons l'homomorphisme u de $\mathbb{A}$-module qui envoie l'élément e_i de la base canonique de $\mathbb{A}^n$ sur v_i. Il existe car $\mathbb{A}$ est un $\mathbb{A}$-module libre. Nous identifions dans la suite $\mathbb{A}^n$ avec $\mathbb{A}^{n\times 1}$ (matrices-colonnes). Nous montrons que le noyau de u est engendré comme $\mathbb{A}$-module par les colonnes de la matrice $xI_n - M$. On a en effet $f(v_j) = \sum_i m_{ij}v_i$, donc $u(xe_j - \sum_i m_{ij}e_i) = xu(e_j) - \sum_i m_{ij}u(e_i) = xv_j - \sum_i m_{ij}v_i = f(v_j) - \sum_i m_{ij}v_i = 0$. Donc la j-ème colonne de $xI_n - M$ est dans le noyau de u.

Soit H le sous-$\mathbb{A}$-module de $\mathbb{A}^n$ engendré par les colonnes de $xI_n - M$. Nous venons de voir que H est contenu dans le noyau de u. Pour prouver l'inclusion réciproque, notons que, considérant $\mathbb{K}^n$ somme un sous- ensemble de $\mathbb{A}^n$, on a $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathbb{K}^n = 0$; en effet, si $m \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathbb{K}^n$, alors $m = \sum_i a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{K}$, et on a $0 = u(m) = \sum_i a_i v_i$ (u est $\mathbb{A}$-linéaire, donc $\mathbb{K}$ linéaire), et les a_i doivent être nuls, et m aussi. Nous avons $xe_j \equiv \sum_i m_{ij}e_i$ modulo H ; il s'ensuit récursivement que tout $m \in \mathbb{A}^n$ est congru modulo H à une combinaison $\mathbb{K}$-linéaire $\sum_i a_i e_i$. Prenons $m \in \mathrm{Ker}(u)$; on aura alors $m \equiv \sum_i a_i e_i$ modulo H. Mais comme $H \subset \mathrm{Ker}(u)$, $\sum_i a_i \in \mathrm{Ker}(u)$, donc les a_i son tous nuls. Donc $m \equiv 0$ modulo H, et $m \in H$.

2. Nous revenons à la notation usuelle pour A^n, dont les éléments sont donc des lignes. Alors $\mathrm{Ker}(u) = K(xI_n - {}^tM)$, avec les notations de la section 9.3. Le théorème se déduit alors de la démarche suivie dans la preuve des théorèmes 9.3 et 9.4, en remarquant que les diviseurs d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes. □

Ce théorème permet entre autres de calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée : c'est en effet le premier invariant de $xI_n - M$.

Corollaire 9.6. *Deux endomorphismes de V sont conjugués si et seulement s'ils ont même invariants.*

Démonstration. Ils ont en effet la même matrice dans deux bases de V. □

Corollaire 9.7. *Soient A, B deux matrices carrées de même ordre sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$. Alors A, B sont sont conjuguées dans $\mathbb{K}^{n\times n}$ si et seulement si elle sont conjuguées dans $\mathbb{L}^{n\times n}$.*

Démonstration. A cause de leur unicité, calculer les diviseurs de $xI_n - M$ dans $\mathbb{K}[x]$ ou dans $\mathbb{L}[x]$, c'est la même chose. □

10 Solutionnaire (esquisses)

3.1

3.2 Ecrivons une relation de dépendance linéaire $\sum_{ij} a_i j\phi_{ij} = 0$. Evaluons chaque côté en e_k : à droite ça donne 0, et à gauche, ça donne $\sum_{ij} a_{ij}\phi_{ij}(e_k) = \sum_{ij} a_{ij}\delta_{ik}f_j = \sum_j a_{kj}f_j$; comme les f_j sont linéairement indépendants, on obtient $a_{kj} = 0$, et ceci pour tous k et j. Soit maintenant $\phi : E \to F$, application linéaire. Ecrivons $\phi(e_i) = \sum_j a_{ij}f_j$. On a alors $\phi = \sum_{ij} a_{ij}\phi_{ij}$, ce qu'on vérifie par le même calcul d'évaluation en e_k.

Une autre preuve consiste à utiliser la bijection connue entre $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des matrices sur $\mathbb{K}$ de taille $p \times n$, et à identifier la base canonique de ce dernier : elle correspond aux ϕ_{ij}.

3.3

3.4 Définissons une fonction u de $M_n(\mathbb{K})$ dans son dual, par $u : A \mapsto (M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, X \mapsto \mathrm{Tr}(AX))$. Il faut vérifier que la fonction entre parenthèses est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ et que la fonction u est une application linéaire. Notons E_{ij} la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ et E^*_{ij} la base duale. Calculons la forme linéaire $u(E_{ij})$, par son action sur la base canonique : on $u(E_{ij})(E_{kl}) = \mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl}) = \mathrm{Tr}(\delta_{jk}E_{il}) = \delta_{jk}\delta_{il} = \delta_{(k,l),(j,i)} = E^*_{ji}(E_{kl})$; donc $u(E_{ij}) = E^*_{ji}$, ce qui implique que u envoie une base sur une base, donc c'est un isomorphisme.

En particulier, toute forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ est de la forme $X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$.

3.5 Tout d'abord f_s est bien définie (la somme est finie) et f_s est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[x]$.

(i) On vérifie que q est une appplication linéaire, c'est-à-dire que $f_{s+t} = f_s + f_t$ et $f_{as} = af_s$. Le noyau de q est nul, car si $f_s = 0$, alors $f_s(x^n) = a_n$ et la suite $s = (a_n)$ est donc nulle. Pour la surjectivité, toute forme linéaire f sur $\mathbb{K}[x]$ est égale à f_s, si l'on pose $s = (f(x^n))$.

(ii) Il suffit de montrer que $\theta(P) = g_P \circ q^{-1}$. Les deux côtés sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}[x]^*$. Evaluons chaque côté sur une forme linéaire sur $\mathbb{K}[x]$, que l'on peut par (i) choisir de la forme f_s. A gauche, on obtient $\theta(P)(f_s) = f_s(P)$ par définition de θ, et à droite on obtient $g_P(q^{-1}(f_s)) = g_P(s) = f_s(P)$.

3.9 Par définition, W est l'ensemble des formes linéaires sur E^* qui s'annulent sur tout élément φ de V. Comme toute forme linéaire sur E^* est de la forme $\theta(e), e \in E$ (dimension finie), et que $\theta(e)(\varphi) = \varphi(e)$, on obtient que W est l'ensemble des $\theta(e)$ tels que $\varphi(e) = 0$ pour tous φ dans V ; c'est-à-dire $\theta(V^\circ)$.

3.15 Soit P dans $\mathcal{P}_n$. Comme ${}^tD(\phi) = \phi \circ D$, on a ${}^tD(\phi)(P) = \phi(D(P)) = \phi(P') = P'(0)$, c'est-à-dire le coefficient de x dans P. Donc ${}^tD(\phi)$ est la forme linéaire sur $\mathcal{P}_n$ qui envoie tout polynôme sur ce coefficient.

3.16 Un oeil exercé aura remarqué l'abus de notation : le premier θ est

θ_F et le second est θ_E.

Pour montrer l'égalité, remarquons que les deux côtés sont des fonctions de E vers F^{**}. Evaluons les deux côtés en e : à gauche, c'est $\theta \circ f(e)$ et à droite c'est ${}^t({}^t f) \circ \theta(e) = {}^t({}^t f)(\theta(e)) = \theta(e) \circ {}^t f$. Les deux expressions sont des éléments du bidual F^{**} ; il faut donc les évaluer en un élément quelconque de F^*, soit φ. On a $\theta \circ f(e)(\varphi) = \theta(f(e))(\varphi) = \varphi(f(e))$. Par ailleurs, $\theta(e) \circ {}^t f(\varphi) = \theta(e)({}^t f(\varphi)) = \theta(e)(\varphi \circ f)) = \varphi \circ f(e)$.

Références

[1] [R1] C. Reutenauer, Notes de cours d'algèbre linéaire 1, UQAM. 3, 4, 13, 19, 31, 32, 38

[2] [R2] C. Reutenauer, Notes de cours d'algèbre linéaire 2, UQAM. 3, 4, 17, 26, 45