

Algèbre linéaire 2

Christophe Reutenauer

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique,
Université du Québec à Montréal

19 janvier 2021

Table des matières

1	Introduction	3
2	Corps des scalaires	3
3	Polynômes, racines et factorisation, division euclidienne et Bezout	3
4	Rappel d'algèbre linéaire 1 : espaces vectoriels, sous-espaces, bases	4
4.1	Les huit axiomes d'un espace vectoriel	4
4.2	Sous-espaces vectoriels	5
4.3	Produits d'espaces vectoriels	5
4.4	Combinaisons linéaires et bases	6
4.5	Sous-espace engendré et rang	7
5	Rappel d'algèbre linéaire 1 : applications linéaires	7
6	Rappel d'algèbre linéaire 1 : déterminants	10
6.1	Développement de Laplace	10
6.2	Produit et matrices par blocs	11
6.3	Matrice adjointe	11
6.4	Rang	11
7	Intersection et somme directe de sous-espaces	12
7.1	Intersection	12
7.2	Somme	13
7.3	Sous-espace stable, somme directe et restriction	14

8	Base du produit d'espaces vectoriels	16
9	Quotient d'un espace par un sous-espace	17
9.1	Quotient	17
9.2	Propriété universelle du quotient	18
9.3	Base et dimension du quotient	18
10	Polynôme caractéristique	19
11	Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres	21
12	Diagonalisation	23
13	Polynôme minimal	25
14	Triangularisation	27
15	Sous-espaces caractéristiques	29
16	Espaces cycliques et matrice compagne	30
17	Forme de Jordan	33
17.1	Cas nilpotent	33
17.2	Forme de Jordan : cas général	39
18	Espaces euclidiens	41
18.1	Inégalité de Cauchy-Schwartz	41
18.2	Orthogonalité et bases orthonormales	43
18.3	Projections orthogonales	44
18.4	Isométries	44
19	Espaces hermitiens	46
20	Formes quadratiques	47
20.1	Matrice d'une forme bilinéaire	47
20.2	Formes bilinéaires symétriques et forme quadratiques	48
20.3	Orthogonalisation	49
20.4	Polynôme associé à une forme quadratique et une base	50
20.5	Equivalence des formes quadratiques	50
20.6	Formes bilinéaires symétriques : classification sur \mathbb{C} et \mathbb{R}	52
20.7	Algorithme de Gauss*	53
20.8	Applications de l'algorithme de Gauss*	55

21 Formes multilinéaires alternées et déterminants	57
22 Exponentielle d'une matrice réelle ou complexe	58
23 Solutionnaire des exercices	60

Remerciements : Sylvain St-Amand.

1 Introduction

Ce cours fait suite au cours d'algèbre linéaire 1, dont on pourra lire les notes [1]. Nous notons \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

2 Corps des scalaires

En algèbre linéaire 1, nous avons étudié les espaces vectoriels sur les réels : l'opération externe, ou produit externe, associe à tout réel a et à tout vecteur v un vecteur noté av . Nous avons étudié ce qu'on appelle les *espaces vectoriels sur \mathbb{R}* .

On peut définir la notion d'espace vectoriel sur d'autres "corps" que \mathbb{R} . Un *corps* est un ensemble qui comme \mathbb{R} a quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division, avec les propriétés usuelles ; en particulier, on peut toujours diviser un élément par un autre élément, sauf si ce dernier est nul.

Nous n'irons pas dans les détails ici. Regardons plutôt des exemples :

- Le corps des nombres réels \mathbb{R} ;
- Le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} ;
- Le corps des nombres complexes \mathbb{C} ;
- Pour p un nombre premier, le corps \mathbb{F}_p dont les éléments sont les entiers modulo p .

Le corps \mathbb{Q} est un *sous-corps* de \mathbb{R} , lequel est un sous-corps de \mathbb{C} .

3 Polynômes, racines et factorisation, division euclidienne et Bezout

Soit \mathbb{K} un corps. On note $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des polynômes en la variable x à coefficients dans \mathbb{K} . Un polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, avec les *coefficients* a_i dans \mathbb{K} . Une *racine* de $P(x)$ dans \mathbb{L} , où \mathbb{L} est un sur-corps de \mathbb{K} (c'est-à-dire \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{L}) est un élément α de \mathbb{L}

tel que $P(\alpha) = 0$, où $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0$. Remarquez que $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ et aussi $P(x) \in \mathbb{L}[x]$.

Par exemple, 1 est une racine de $x^2 - 1$ dans \mathbb{R} , et i (le nombre complexe "racine de -1") est une racine de $x^2 + 1$ dans \mathbb{C} .

Le polynôme $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ est dit *scindé sur \mathbb{K}* s'il s'écrit $P(x) = a_n \prod_{i=1}^{i=n} (x - \alpha_i)$, où les α_i sont dans \mathbb{K} . Notez que ses racines sont alors les α_i et qu'il n'y en a pas d'autres, même dans un sur-corps. C'est pourquoi on dit aussi que *P a toutes ses racines dans \mathbb{K}* .

Par exemple, le polynôme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, ses racines sont 1, $-1 \in \mathbb{Q}$ et il n'y a pas d'autre racine, que ce soit dans \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Si dans la factorisation ci-dessus de $P(x)$, plusieurs des α_i sont égaux, on appelle *multiplicité* de α_i le nombre de α_j égaux à α_i .

Par exemple, la racine 1 est de multiplicité 1 dans le polynôme $x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ (on dit aussi qu'elle est *simple*), alors qu'elle est de multiplicité 3 dans $(x - 1)^3(x + 3)^2$.

Un théorème importante est le *théorème fondamental de l'algèbre* : tout polynôme à coefficients sur \mathbb{C} est scindé.

Une propriété importante des polynômes est la *division euclidienne* : si A, B sont dans $\mathbb{K}[x]$, avec $B \neq 0$, alors il existe $Q, R \in \mathbb{K}[x]$ tels que $A = BQ + R$ et $0 \leq \deg(R) < \deg(B)$.

Une autre dont nous aurons besoin est que si A, B n'ont pas de diviseur commun, alors il existe P, Q tels que $AP + BQ = 1$ (*théorème de Bezout*).

4 Rappels d'algèbre linéaire 1 : espaces vectoriels, sous-espaces, bases

Dans toutes ces notes \mathbb{K} est un corps.

4.1 Les huit axiomes d'un espace vectoriel

Définition 4.1. *Un espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou \mathbb{K} -espace vectoriel) est un ensemble E qui a deux opérations. La première, appelé addition, ou somme, et la seconde est appelée produit externe. L'addition associe à deux éléments quelconques x, y de E un élément noté $x + y$. Le produit externe associe à un élément $a \in \mathbb{K}$ et à un élément x de E un élément de E noté ax . Ces deux opérations jouissent des propriétés suivantes (appelées axiomes des espaces vectoriels) : quels que soient les éléments x, y, z de E et les éléments a, b de \mathbb{K} , on a :*

1. $x + y = y + x$ (commutativité) ;

2. $(x + y) + z = (x + y) + z$ (associativité);
3. Il existe un élément 0 de E tel que $x + 0 = x$ (existence de l'élément neutre);
4. Il existe un élément x' de E tel que $x + x' = 0$ (existence de l'opposé);
5. $1x = x$ (le produit externe de $1 \in \mathbb{R}$ avec x est égal à x);
6. $(a + b)x = ax + bx$ (distributivité);
7. $a(x + y) = ax + ay$ (distributivité);
8. $(ab)x = a(bx)$ (associativité).

Les éléments de E sont appelés des *vecteurs* et les éléments de \mathbb{K} sont appelés des *scalaires*.

Abus de notation : on utilise la même notation 0 pour le zéro de l'espace vectoriel E (appelé le *vecteur nul*) et pour le zéro de \mathbb{K} . S'il y a un risque de confusion, on peut écrire 0_E et $0_{\mathbb{K}}$ (mais le mathématicien avancé le fait rarement).

Exemple d'espace vectoriel : \mathbb{K}^n .

4.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.2. *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble E non vide de V qui est fermé sous les deux opérations de V ; ce qui signifie que quels que soient les vecteurs u, v dans E et le scalaire a , on a $u + v \in E$ et av dans E .*

Pour vérifier la non-vacuité de E , on peut vérifier que $0 \in E$.

Exercice 4.1. *Montrer que $\{(a, b), b = a^2\}$ n'est pas un sous-espace de \mathbb{R}^2 .*

Exercice 4.2. *Même chose pour $\{(a, b), a, b \geq 0\}$.*

4.3 Produits d'espaces vectoriels

Le *produit des espaces vectoriels* E_1, \dots, E_n est le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ de ces espace vectoriels, avec somme et produit externe définis par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Le cas particulier où $E_i = \mathbb{K}$ pour tout i est particulièrement important : \mathbb{K}^n est un espace vectoriel. En fait, peut sans crainte identifier les n -uplets d'éléments de \mathbb{K} et les matrice lignes sur \mathbb{K} de taille $1 \times n$.

4.4 Combinaisons linéaires et bases

Définition 4.3. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une combinaison linéaire dans E est une expression de la forme $a_1e_1 + \dots + a_n e_n$ où a_1, \dots, a_n sont dans \mathbb{K} et e_1, \dots, e_n sont dans E . On appelle coefficients de la combinaison linéaire les réels a_1, \dots, a_n .

Toute combinaison linéaire représente un vecteur de E .

Définition 4.4. Une base d'un espace vectoriel E est une famille e_1, \dots, e_n de vecteurs dans E telle que tout vecteur dans E est une combinaison linéaire de ces vecteurs, et ceci de manière unique.

Théorème 4.1. Deux bases quelconques de E ont le même nombre d'éléments.

Cette cardinalité commune des bases de E s'appelle la *dimension* de E . A strictement parler, nous ne nous occupons ici que des espaces de dimension finie. Il existe aussi une théorie des espaces de dimension infinie.

Théorème 4.2. Si des vecteurs v_1, \dots, v_n engendrent V (c'est-à-dire, si tout vecteur dans V est combinaison linéaire de ces vecteurs), alors il existe une sous-famille de ces vecteurs qui forme une base de V . En particulier la dimension de V est $\leq n$.

Théorème 4.3. Si W est un sous-espace de V , alors $\dim(W) \leq \dim(V)$ et l'inégalité est stricte si $W \neq V$.

Ce théorème sert entre autres à montrer que si $\dim(W) = \dim(V)$, alors $W = V$.

On dit que des vecteurs v_1, \dots, v_n d'un espace vectoriel V sont *linéairement indépendants* si pour tous scalaires a_1, \dots, a_n tels que $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$, on $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Théorème 4.4. Si des vecteurs v_1, \dots, v_n d'un espace vectoriel V sont linéairement indépendants, alors il existe une base de V qui les contient. En particulier $\dim(V) \geq n$.

Théorème 4.5. Soit V un espace vectoriel et v_1, \dots, v_n des vecteurs dans V . Deux quelconques des trois conditions suivantes impliquent la troisième :

- (i) $\dim(V) = n$;
- (ii) v_1, \dots, v_n engendrent V ;
- (iii) v_1, \dots, v_n sont linéairement indépendants.

Notez que (ii) et (iii) signifient que ces vecteurs forment une base de V .

Exercice 4.3. Les vecteurs $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ forment-ils une base de \mathbb{K}^2 ?

Exercice 4.4. Montrer que $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ forment une base de \mathbb{K}^3 .

Exercice 4.5. Les vecteurs $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (2, 0, 1)$ forment-ils une base de \mathbb{K}^3 ?

Exercice 4.6. Montrez que les vecteurs $(1, -1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1) \in \mathbb{K}^3$ sont linéairement dépendants.

Exercice 4.7. Donnez plusieurs bases de l'espace vectoriel $\{(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a + b + c = 0\}$.

Exercice 4.8. Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'espace vectoriel \mathbb{K}^3 a pour base $(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)$. Indication : le corps \mathbb{F}_3 est l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ avec l'addition $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 0, 2 + 2 = 1$ et la multiplication par $2 \cdot 2 = 1$, avec les propriétés usuelles pour 0 et 1.

Exercice 4.9. Montrer que pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, l'exercice précédent n'est pas vrai.

Exercice 4.10. On utilise ici la notion de base infinie, et de dimension infinie. Montrer que le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[x]$ a pour base $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$; et aussi pour base $1, 1 + x, 1 + x + x^2, \dots, 1 + x + \dots + x^n, \dots$.

4.5 Sous-espace engendré et rang

Le rang d'un ensemble de vecteurs est par définition la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Rappelons que le sous-espace engendré par les vecteurs v_1, \dots, v_n est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs. On le note $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ ou $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Exercice 4.11. Montrer que $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$ si et seulement si v_n est combinaison linéaire de v_1, \dots, v_{n-1} .

5 Rappel d'algèbre linéaire 1 : applications linéaires

Définition 5.1. Soient E, F des espaces vectoriels. Une fonction $f : E \rightarrow F$ (c'est-à-dire une fonction de E vers F) est appelée une application linéaire si pour tous vecteurs x, y dans E et tout scalaire a on $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(ax) = af(x)$.

Lorsque $E = F$, on parle d'endomorphisme de E . Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de forme linéaire sur E .

Définition 5.2. Le noyau d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs qu'elle envoie sur 0.

Si f est une application linéaire de E vers F , on note $\text{Ker}(f)$ son noyau. On a donc $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0)$.

Proposition 5.1. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est (le sous-espace) nul.

Théorème 5.1. (théorème du rang) Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$.

Ce théorème s'appelle théorème du rang car on appelle rang de f la dimension de $\text{Im}(f)$. Notation $\text{rg}(f)$.

Proposition 5.2. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Lorsqu'on compose plusieurs fois un endomorphisme f avec lui-même, on parle de puissance et on le note f^n . On a donc $f^1 = f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ si $n \geq 2$.

Définition 5.3. Un isomorphisme est une application linéaire bijective. S'il existe un isomorphisme de E vers F , on dit que E et F sont isomorphes.

Proposition 5.3. Si f est un isomorphisme, alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi un isomorphisme.

Théorème 5.2. Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors il existe des isomorphismes de E vers F .

Théorème 5.3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et B une base de E .

- (i) f est injective si et seulement si $f(B)$ est linéairement indépendant.
- (ii) f est surjective si et seulement si $f(B)$ engendre F .

Définition 5.4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, u_1, \dots, u_n une base de E et v_1, \dots, v_p une base de F . La matrice de f dans ces bases est la matrice $M(f) = (a_{ij})$ de taille $p \times n$ telle que pour tout $j = 1, \dots, n$, on a $f(u_j) = \sum_i a_{ij}v_i$.

Si x est un vecteur dans E , avec $f(x) = y \in F$, alors on peut écrire dans les bases $x = \sum_j \alpha_j u_j$ et $y = \sum_i \beta_i v_i$. Les coefficients α_j et β_i , qui sont dans \mathbb{K} , sont liés par le produit matriciel

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = M(f) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

On notera la cohérence de ce produit matriciel : à gauche une colonne, c'est-à-dire une matrice $p \times 1$, et à droite le produit d'une matrice $p \times n$ par une matrice-colonne $n \times 1$. Ce genre de vérification est souvent utile, et permet de vérifier les formules.

Dans le cas particulier où f un endomorphisme de E et u_1, \dots, u_n une base de E , on parle de *matrice de f dans cette base* : c'est le cas particulier de la définition précédente où les deux espaces sont égaux, et où les deux bases ont égales. On a donc $f(u_j) = \sum_i a_{ij} u_i$.

La matrice d'un endomorphisme est toujours une matrice carrée. Rappelons que l'*ordre* d'une matrice carrée est le nombre de ses lignes (= le nombre de ses colonnes).

Proposition 5.4. *Soient f, g des endomorphismes de E ; alors on a : $M(g \circ f) = M(g)M(f)$, $M(f^n) = M(f)^n$. La fonction $f \mapsto M(f)$ est un isomorphisme de l'espace des endomorphismes de E vers l'espace des matrices carrées d'ordre $\dim(E)$.*

Théorème 5.4. *Soit f un endomorphisme de E , avec $\dim(E) < \infty$. Alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est injectif $\Leftrightarrow f$ est surjectif $\Leftrightarrow M(f)$ est une matrice inversible.*

Un endomorphisme bijectif est appelé un *automorphisme*. Pour un automorphisme f , on définit la *puissance* f^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Concluons cette section avec les changements de bases. Soient f un endomorphisme de E , $U = (u_1, \dots, u_n)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$ des bases de E . Soit M_U la matrice de f dans la base U et de même pour M_V . On appelle *matrice de passage de U à V* la matrice $P_{U,V} = (b_{ij})$ la matrice $n \times n$ définie par

$$v_j = \sum_i b_{ij} u_i.$$

Autrement dit la j -ème colonne de $P_{U,V}$ comporte les coefficients de la combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n qui représente v_j .

Alors $P_{U,V}$ est l'inverse de la matrice $P_{V,U}$. De plus

$$M_V = P_{V,U} M_U P_{U,V} = P_{U,V}^{-1} M_U P_{U,V}.$$

Corollaire 5.1. Les matrices d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ dans les bases de E sont conjuguées.

Exercice 5.1. Montrer que $(a, b, c, d) \mapsto (a, b, c)$ de \mathbb{K}^4 dans \mathbb{K}^3 est une application linéaire.

Exercice 5.2. Montrer que $x \mapsto x+1$ de \mathbb{K} dans lui-même n'est pas linéaire.

Exercice 5.3. Même chose avec $x \mapsto x^2$, sauf si $1 + 1 = 0$ dans \mathbb{K} .

Exercice 5.4. L'application linéaire de l'exercice 5.1 est-elle injective ? surjective ? quel est son rang ?

Exercice 5.5. Soit $f(a, b, c, d) = (a + b, b)$, $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^2$. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f .

Exercice 5.6. Montrer que $(a, b, c, d) \mapsto (d, a, c, b)$ est un isomorphisme de \mathbb{K}^4 dans lui-même.

Exercice 5.7. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^2 tel que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Quelle est sa matrice dans la base $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. A quelle condition f est-il un isomorphisme ?

Exercice 5.8. Soit $f(x, y) = (2x, y)$ l'endomorphisme de \mathbb{K}^2 . Déterminer sa matrice dans la base de l'exercice 5.7. Puis dans la base $(2, 1), (1, 1)$.

Exercice 5.9. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^2 telle que $f(x, y) = (x + y, y)$. Calculer f^n .

Exercice 5.10. Même chose avec $f(x, y) = (y, 0)$.

Exercice 5.11. Calculer le noyau est l'image de l'endomorphisme de l'exercice 5.10

6 Rappel d'algèbre linéaire 1 : déterminants

6.1 Développement de Laplace

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice $n \times n$ sur \mathbb{K} . Le ij -mineur de cette matrice (ou par abus, le mineur de a_{ij}) est le déterminant de la matrice $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenue en supprimant dans A la i -ème ligne et la j -ème colonne ; cette matrice est notée A^{ij} . Le mineur en question est donc $\det(A^{ij})$.

Le développement de Laplace du déterminant selon la ligne i est

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}).$$

Le développement de Laplace du déterminant selon la colonne j est

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}).$$

6.2 Produit et matrices par blocs

Théorème 6.1. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Corollaire 6.1. Deux matrices carrées conjuguées ont même déterminant.

Théorème 6.2. Si la matrice carrée A a une décomposition par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \text{ où } A_1, A_2 \text{ sont des matrices carrées, alors } \det(A) = \det(A_1) \det(A_2).$$

6.3 Matrice adjointe

On appelle ij -cofacteur de A (ou par abus, cofacteur de a_{ij}) le terme $(-1)^{i+j} \det(A^{ij})$.

La matrice adjointe de A , ou comatrice, est la matrice

$$\text{adj}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A^{ji}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Attention à la transposition : en position ij , on met le cofacteur de a_{ji} .

Théorème 6.3. $A \text{ adj}(A) = \text{adj}(A) A = \det(A) I_n$.

Théorème 6.4. A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Dans ce cas $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

6.4 Rang

Le rang d'une matrice (rectangulaire) A est par définition le plus grand r tel que A ait une sous-matrice de taille $r \times r$ de déterminant non nul.

Théorème 6.5. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes, au rang de ses vecteurs lignes, et aussi au rang de l'application linéaire dont elle est la matrice.

Exercice 6.1. (questions de cours de cegep-algèbre linéaire 1) Compléter chaque phrase :

- Si dans M , deux lignes sont égales, alors $\det(M) = \dots$
- Si dans M , une ligne est combinaison linéaire des autres lignes, alors $\det(M) = \dots$
- Si dans M on échange deux lignes, alors son déterminant est \dots
- Si M est carrée d'ordre n et $a \in \mathbb{K}$, alors $\det(aM) = \dots$
- Le déterminant de l'inverse de M est \dots
- Le déterminant de la transposée de M est \dots
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est \dots

Exercice 6.2. Calculer le déterminant des matrices suivantes : $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6.3. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Exercice 6.4. Soient A, B des matrices de taille $n \times p$ et $p \times n$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Exercice 6.5. Calculer et factoriser le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6.6. Soit M la matrice carrée ayant la décomposition par blocs $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ C & B \end{bmatrix}$, où A, C sont des matrices carrées. Quel est son déterminant ?

7 Intersection et somme directe de sous-espaces

7.1 Intersection

Théorème 7.1. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel E . Alors leur intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace de E .

La preuve est tout-à-fait analogue au cas de deux sous-espaces (voir [?]).

Corollaire 7.1. Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs dans V . Alors le sous-espace engendré par ces vecteurs est égal à l'intersection de tous les sous-espaces de V qui contiennent ces vecteurs. C'est aussi le plus petit sous-espace qui contient ces vecteurs.

Autrement dit, soit \mathcal{E} l'ensemble de sous-espaces E de V tels que $v_1, \dots, v_n \in E$. Alors $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$ est le sous-espace engendré par v_1, \dots, v_n .

Démonstration. 1. L'intersection $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$ est un sous-espace qui contient v_1, \dots, v_n . Elle contient donc toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs, donc contient $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

2. Réciproquement, celui-ci est un sous-espace qui contient v_1, \dots, v_n . Donc l'intersection est contenue dans $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. \square

7.2 Somme

Définition 7.1. Soit $E_i, i \in I$, une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel V . La somme de ces sous-espaces est l'intersection de tous les sous-espaces qui les contiennent tous.

D'après le théorème 7.1, la somme des E_i est un sous-espace de V .

Lorsque ces sous-espaces sont en nombre fini, disons E_1, \dots, E_n , on note aussi $E_1 + \dots + E_n$ leur somme.

Proposition 7.1. Soient E_i des sous-espaces de V . On a $E_1 + \dots + E_n = \{v_1 + \dots + v_n, v_i \in E_i\}$.

Démonstration. On vérifie sans peine que le membre droit est un sous-espace vectoriel F . Il contient chaque E_i . Par conséquent $E_1 + \dots + E_n \subset F$, par définition de la somme. Réciproquement, si $v \in F$, alors $v = \sum_i v_i, v_i \in E_i$; si W est un sous-espace qui contient tous les E_i , alors $v \in W$; par suite F est contenu dans l'intersection de tous ces W , donc $F \subset E_1 + \dots + E_n \subset F$. \square

Définition 7.2. Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces de V . On dit que la somme des sous-espaces est directe si quels que soient les vecteurs $v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n$, on a $v_1 + \dots + v_n = 0$ seulement si chaque $v_i = 0$ ¹.

Exemple 7.1. Soient $\{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{K}\}$ et $\{0, c, d), c, d \in \mathbb{K}\}$, qui sont deux sous-espaces de \mathbb{K}^3 . Leur somme n'est pas directe.

1. On appelle souvent ce type de somme directe une *somme directe interne*, le mot "interne" indiquant que les espaces qu'on additionne sont tous sous-espaces d'un même espace.

Proposition 7.2. *La somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = 0$.*

Attention : la généralisation de cette proposition à plus de deux sous-espaces n'est pas que les sous-espaces soient deux à deux d'intersection nulle ; cette dernière condition est insuffisante. Voir l'exercice 7.3.

Démonstration. Si la somme est directe, soit $x \in E_1 \cap E_2$. Notons que $x + (-x) = 0$; comme $x \in E_1$ et $-x \in E_2$, la définition de somme directe implique que $x = 0 = -x$. Donc $E_1 \cap E_2 = 0$.

Réciproquement, si cette intersection est nulle, soit $x_i \in E_i$ tels que $x_1 + x_2 = 0$. Alors $x_1 = -x_2 \in E_2$, donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$, et par suite $x_1 = 0$ et enfin $x_2 = 0$. \square

Proposition 7.3. *Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces de V et soit B_i une base de E_i . La somme $E_1 + \dots + E_n$ est directe si et seulement si les bases B_i sont disjointes et si $B_1 \cup \dots \cup B_n$ est une base de la somme des sous-espaces E_i .*

Une telle base de V s'appelle une *base adaptée à la somme directe* $E_1 + \dots + E_n$.

Démonstration. Il est clair que la réunion des B_i engendre la somme des sous-espaces E_i .

Supposons que la somme soit directe. Alors les bases doivent être disjointes (sinon il existe $i \neq j$ et un vecteur v non nul dans $E_i \cap E_j$, et ce vecteur a deux écritures distinctes comme somme de vecteurs dans E_i , contradiction). De plus, les vecteurs dans $B_1 \cup \dots \cup B_n$ sont linéairement indépendants : en effet, un relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs se réécrit, à cause de la définition 7.2, en n relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de chaque B_i ; les coefficients sont donc tous nuls.

Réciproquement, supposons que $B_1 \cup \dots \cup B_n$ est une base de la somme des sous-espaces ; si $\sum_i v_i = 0$, avec $v_i \in E_i$, alors écrivons chaque v_i comme combinaison linéaire de v_i ; nous obtenons alors une relation de dépendance linéaire des vecteurs de $\cup_i B_i$, laquelle doit avoir tous ses coefficients nuls, et donc chaque $v_i = 0$. La somme est donc directe. \square

7.3 Sous-espace stable, somme directe et restriction

On dit qu'un sous-espace est *stable* sous l'endomorphisme f si $f(W) \subset W$.

Proposition 7.4. Soit f un endomorphisme de V , et supposons que V soit somme directe des sous-espaces E_1, \dots, E_n . Soit B une base adaptée à cette somme directe. Supposons aussi que chaque E_i soit stable sous f . Alors la matrice de f dans cette base a la forme diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Une matrice de cette forme est appelée *somme diagonale* des matrices M_1, \dots, M_n . Attention : une somme diagonale de matrices *n'est pas une somme de matrices* au sens usuel. Du reste, on ne pourrait pas additionner des matrices carrées de taille différentes, mais on peut toujours faire leur somme diagonale.

Démonstration. Regardons un exemple. Supposons que V soit de dimension 4, et somme directe de E_1 et E_2 . Supposons que E_1 ait pour base e_1, e_2 et E_2 ait pour base e_3, e_4 . Alors e_1, e_2, e_3, e_4 est une base de V . On a par hypothèse $f(e_1) = ae_1 + be_2$, $f(e_2) = ce_1 + de_2$. Donc les deux premières

colonnes de la matrice de f dans la base ci-dessus sont $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En raisonnant de même avec e_3 et e_4 , on trouve que la matrice de f est de

la forme $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & g \\ 0 & 0 & h & i \end{bmatrix}$, qui est une somme diagonale de deux matrices

carrées. □

Définition 7.3. Soit f un endomorphisme de V et W un sous-espace stable sous f . La restriction de f à W est l'endomorphisme de W , noté $f|W$, défini par $(f|W)(w) = f(w)$ pour tout w dans W .

Proposition 7.5. Soit g, f des endomorphismes de V , W un sous-espace stable sous f et g . Alors $(f+g)|W = f|W + g|W$, $(g \circ f)|W = (g|W) \circ (f|W)$ et $(f|W)^n = f^n|W$.

Démonstration. □

Exercice 7.1. Soient $v_i \in V$, $i = 1, \dots, n$. Soit $\mathbb{K}v_i = \{av_i, a \in \mathbb{K}\}$; montrer que ceci est le sous-espace engendré par v_i . Montrer que $\mathbb{K}v_1 + \dots + \mathbb{K}v_n$ est le sous-espace engendré par v_1, \dots, v_n . Montrer que cette somme est directe si et seulement si les v_i sont linéairement indépendants.

Exercice 7.2. Soit V un espace vectoriel et $p : V \rightarrow V$ un endomorphisme idempotent, c'est-à-dire $p^2 = p$. Montrer que V est somme directe de $\text{Ker}(p)$ et de $\text{Im}(p)$.

Exercice 7.3. Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces de V . Montrer que la somme de ces sous-espaces est directe si et seulement si quel que soit $i = 1, \dots, n - 1$, on a $(E_1 + \dots + E_i) \cap E_{i+1} = 0$.

Exercice 7.4. Soient W_1, \dots, W_k des sous-espaces de V dont la somme W est directe. Montrer que la dimension de W est la somme des dimensions des W_i .

Exercice 7.5. Soit $f \in \text{End}(V)$. On dit que V est irréductible sous l'action de f si V ne possède pas de sous-espace stable sous f , sauf V et $\{0\}$ (ces deux sous-espaces sont toujours trivialement stables). Montrer que si le polynôme caractéristique de f est irréductible, alors V est irréductible sous l'action de f .

8 Base du produit d'espaces vectoriels

Théorème 8.1. Soient E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Soit B_i une base de E_i . Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ a pour base $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B'_i$, où $B'_i = 0 \times \dots \times 0 \times B_i \times 0 \times \dots \times 0$ (le B_i en position i). En particulier, $\dim(E_1 \times \dots \times E_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \dim(B_i)$.

Exemple 8.1. Si X a pour base x_1, x_2, \dots , et Y a pour base y_1, y_2, \dots , alors $X \times Y$ a pour base les vecteurs $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (0, y_1), (0, y_2), \dots$

Démonstration. □

Exercice 8.1. Soient deux sous-espaces vectoriels V et W d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\varphi : V \times W \rightarrow E$, $(v, w) \mapsto v + w$. Montrer que φ est une application linéaire, que son image est la somme $V + W$ et que son noyau est $\text{Ker}(\varphi) = \{(h, -h), h \in V \cap W\}$. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ et $V \cap W$ sont isomorphes. En déduire que $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V + W) + \dim(V \cap W)$.

9 Quotient d'un espace par un sous-espace

9.1 Quotient

Soit V un espace vectoriel et H un sous-espace. Pour $v \in V$, $v + H$ désigne l'ensemble $\{v + h, h \in H\}$. On est fondé à appeler cet ensemble le *translaté de H par v* . Cas particulier : $0 + H = H$.

Définition 9.1. Le quotient de V par H , noté V/H , est l'ensemble des translatés de H par tous les vecteurs de V .

Autrement dit : $V/H = \{v + H, v \in V\}$.

Proposition 9.1. Si $u, v \in V$, on a $u + H = v + H$ si et seulement si $u - v \in H$.

Cas particulier : $u + H = H$ si et seulement si $u \in H$.

Démonstration. Remarquons que $u \in u + H$. Si $u + H = v + H$, alors $u \in v + H$, donc il existe $h \in H$ tel que $u = v + h$ et donc $u - v = h \in H$.

Réciproquement, si $u - v \in H$, alors il existe $h \in H$ tel que $u = v + h$; donc $u + H = v + h + H = v + (h + H) = v + H$. Symétriquement, $v + H \subset u + H$, d'où l'égalité. \square

Définition 9.2. On note $u \equiv v \pmod{H}$ pour dire que $u - v \in H$, ou de manière équivalente, que $u + H = v + H$.

L'ensemble V/H devient un espace vectoriel de la manière suivante : la somme de deux translatés $u + H$ et $v + H$ est $u + v + H$ (avec abus de notation, car on devrait écrire $(u + v) + H$); le produit externe de $a \in \mathbb{K}$ et de $v + H$ est $av + H$.

Il faut vérifier la cohérence de ces définitions.

V/H devient ainsi un espace vectoriel, et la fonction $\pi : v \mapsto v + H$ est une application linéaire surjective, appelée la *projection canonique* de V sur V/H :

$$\pi(v) = v + H.$$

On a en particulier $0_{V/H} = H$, le zéro de V/H . De plus, le noyau de π est H : en effet, $\pi(v) = 0_{V/H}$ si et seulement si $v + H = H$, c'est-à-dire $v \in H$.

9.2 Propriété universelle du quotient

Théorème 9.1. *Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire, H son noyau et π la projection canonique $V \rightarrow V/H$. Il existe une unique application linéaire $\bar{f} : V/H \rightarrow W$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$. De plus, \bar{f} est injectif; si f est surjectif, \bar{f} l'est aussi.*

Démonstration. Unicité de \bar{f} : on veut que $f = \bar{f} \circ \pi$; donc pour tout v dans V , on doit avoir $\bar{f}(v + H) = \bar{f} \circ \pi(v) = f(v)$, ce qui montre l'unicité de \bar{f} .

Existence de \bar{f} : on définit \bar{f} par $\bar{f}(v + H) = f(v)$. C'est bien défini, car si $v + H = v' + H$, alors $v - v' \in H = \text{Ker}(f)$, donc $f(v) = f(v')$.

Il faut aussi vérifier que \bar{f} ainsi définie est linéaire.

Montrons que \bar{f} est injectif : si $v + H$ est dans son noyau, alors $0 = \bar{f}(v + H) = f(v)$ donc $v \in H$, donc $v + H = H$, le zéro de V/H . Donc \bar{f} est injective.

Si f est surjective, alors \bar{f} l'est aussi, car $f(v) = \bar{f}(v + H)$. □

Corollaire 9.1. *$\text{Im}(f)$ est isomorphe à $V/\text{Ker}(f)$.*

Si f est surjectif, ça dit donc que W est isomorphe à $V/\text{Ker}(f)$.

9.3 Base et dimension du quotient

Théorème 9.2. *Si V est de dimension finie, alors V/H est de dimension $\dim(V) - \dim(H)$. Plus précisément, si v_1, \dots, v_n est une base de V telle que v_1, \dots, v_h est une base de H , alors $v_{h+1} + H, \dots, v_n + H$ est une base de V/H .*

On notera qu'une telle base de V existe toujours (théorème de la base incomplète).

Démonstration. Notons π la projection canonique $V \rightarrow V/H$. Les vecteurs $\pi(v_{h+1}), \dots, \pi(v_n)$ engendrent V/H . En effet, soit $v + H$ un élément quelconque de V/H ; on peut écrire $v = \sum_i a_i v_i$; alors $v + H = \pi(v) = \sum_i a_i \pi(v_i) = \sum_{i>h} a_i \pi(v_i)$, car les vecteurs $\pi(v_i)$ sont dans le noyau de π quand $i = 1, \dots, h$.

Les vecteurs $\pi(v_{h+1}), \dots, \pi(v_n)$ sont linéairement indépendants : en effet, si $\sum_{i>h} a_i \pi(v_i) = 0$, alors $0 = \pi(\sum_{i>h} a_i v_i)$, donc $\pi(\sum_{i>h} a_i v_i)$ est dans le noyau de π , qui est H . Donc $\sum_{i>h} a_i v_i = \sum_{i \leq h} a_i v_i$, et ceci n'est possible que si les a_i sont tous nuls. □

On notera que ce théorème, joint au corollaire 9.1, implique le théorème du rang (théorème 5.1).

Exercice 9.1. Soient V, W des sous-espaces de E , espace vectoriel de dimension finie. Soit $\pi : V + W \rightarrow (V + W)/W$ la projection canonique. Soit $i : V \rightarrow V + W$ l'injection canonique, c'est-à-dire $i(v) = v$ pour tout $v \in V$. Soit $f = \pi \circ i$. Montrer que le noyau de f est $V \cap W$. Montrer que f est surjective. En déduire que $(V + W)/W$ est isomorphe à $V/(V \cap W)$. En déduire que $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$ (égalité prouvée d'une autre manière dans l'exercice 8.1).

Exercice 9.2. On considère deux applications linéaires $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, où f est injective, g surjective et $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$. Montrer que $\dim(A) - \dim(B) + \dim(C) = 0$. Indication : trouver une base b_1, \dots, b_n de B telle que b_1, \dots, b_r soit une base de $\text{Im}(f)$ et montrer que $g(b_1), \dots, g(b_r)$ est une base de C .

Exercice 9.3. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[x]$ et son sous-espace V dont les éléments sont les polynômes dont le terme constant est nul. Montrer que $P \equiv Q \pmod{V}$ si et seulement si P, Q ont même terme constant.

Exercice 9.4. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ définissons $P \sim Q$ si et seulement si les sommes des coefficients de P et Q sont égaux. Déterminer un sous-espace W tel que : $P \sim Q \Leftrightarrow P \equiv Q \pmod{W}$.

10 Polynôme caractéristique

Définition 10.1. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée M d'ordre n est $\det(xI_n - M) \in \mathbb{K}[x]$.

Théorème 10.1. (Cayley-Hamilton) Soit $P(x)$ le polynôme caractéristique de M . On a $P(M) = 0$.

Ecrivons $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Alors $P(M) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \dots + a_1M + a_0I_n$.

Exemple 10.1. $n = 2$, $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $P(x) = x^2 - (a + d)x + ad - bc = x^2 - \text{Tr}(M)x + \det(M)$. Donc $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a + d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = 0$, ce qu'on peut vérifier directement.

Lemme 10.1. Si une matrice carrée d'ordre h a des coefficients qui sont des polynômes de degré ≤ 1 , alors son déterminant est un polynôme de degré $\leq h$.

Démonstration. Ça se démontre par une récurrence évidente, en utilisant le développement de Laplace. \square

Preuve du théorème 10.1. Soit $N = xI_n - M$ et A la matrice adjointe de N . Alors par le lemme chaque coefficient de A est de degré au plus $n - 1$. On a $NA = P(x)I_n$, où $P(x) = \det(N)$, le polynôme caractéristique de M . On peut écrire $A = A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0$, où les matrices A_i sont carrées d'ordre n et à coefficients dans \mathbb{K} .

On a donc $(xI_n - M) \sum_i A_i x^i = P(x)I_n = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)I_n$. On en déduit les équations, par identification des monômes en x :

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= a_n I_n \\ A_{n-2} - MA_{n-1} &= a_{n-1} I_n \\ &\vdots \\ A_0 - MA_1 &= a_1 I_n \\ -MA_0 &= a_0 I_n \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P(M) &= a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \dots + a_1 M + a_0 I_n \\ &= M^n (a_n I_n) + M^{n-1} (a_{n-1} I_n) + \dots + M (a_1 I_n) + a_0 I_n \\ &= M^n A_{n-1} + M^{n-1} (A_{n-2} - MA_{n-1} + \dots + M(A_0 - MA_1) - MA_0) \\ &= M^n A_{n-1} + M^{n-1} A_{n-2} - M^n A_{n-1} + \dots + MA_0 - M^2 A_1 - MA_0 = 0. \end{aligned}$$

\square

Définition 10.2. *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de V est le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base de V .*

Ceci est bien défini car on a la

Proposition 10.1. *Si deux matrices carrées A, B sont conjuguées, elles ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. On a $B = P^{-1}AP$. Alors $xI - B = P^{-1}(xI - A)P$. On prend les déterminants, on utilise la formule du produit, en remarquant que $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$, et on en déduit le résultat. \square

Corollaire 10.1. *Soit $P(x)$ le polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Alors $P(f) = 0$.*

On a défini $P(f) = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 \text{id}$.

Démonstration. On choisit une base, et soit M la matrice de f dans cette base. Soit $P(x) = \det(xI_n - M)$. Alors $P(x)$ est le polynôme caractéristique à la fois de M et de f . De plus, $P(M)$ est la matrice de $P(f)$ dans cette base (proposition 5.4); comme $P(M) = 0$, on $P(f) = 0$. \square

Exercice 10.1. *Montrer que le polynôme caractéristique de M , matrice $n \times n$, est de la forme $x^n - \text{Tr}(M)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M)$. Utiliser le développement de Laplace et le lemme 10.1.*

Exercice 10.2. *Montrer que si A, B sont des matrices carrées, alors AB et BA ont le même polynôme caractéristique. Indication : supposer B inversible.*

Exercice 10.3. *Calculer le polynôme caractéristique de la matrice*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 10.4. *On suppose que M est la matrice (1). Montrer que son polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques des M_i .*

11 Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres

Définition 11.1. *Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V sur \mathbb{K} . On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur v non nul dans V tel que $f(v) = \lambda v$. Un tel vecteur est alors appelé vecteur propre, et on dit qu'il est attaché à la valeur propre λ .*

Définition 11.2. *Soit A une matrice carrée d'ordre n . Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel des colonnes $V = M_{n1}$ dont A est la matrice. Autrement dit, si $v \in V$, alors $f(v) = Av$. Les valeurs propres (resp. vecteurs propres) de A sont les valeurs propres (resp. vecteurs propres) de f .*

Remarquez qu'un vecteur propre est, par définition, toujours non nul.

Proposition 11.1. *Un endomorphisme de V a la valeur propre λ si et seulement si $f - \lambda \text{id}$ n'est pas un automorphisme de V .*

Démonstration. Si λ est une valeur propre de f , alors il existe v non nul tel que $f(v) = \lambda v$. Donc $(f - \lambda \text{id})(v) = 0$. Donc $f - \lambda \text{id}$ n'est pas un automorphisme de V , car non injectif (proposition 5.1).

Réciproquement, si $f - \lambda \text{id}$ n'est pas un automorphisme de V , alors $f - \lambda \text{id}$ n'est pas injectif (proposition 5.1). Donc $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq 0$. Il existe donc $v \neq 0$ dans V tel que $(f - \lambda \text{id})(v) = 0$. C'est-à-dire : $f(v) = \lambda v$. Donc λ est une valeur propre de f . \square

Le *déterminant* d'un endomorphisme de V est par définition le déterminant de sa matrice dans une base de V . Ceci est bien défini, car si on change de base, alors on conjugue la matrice (corollaire 5.1), et par suite le déterminant reste le même.

Il découle des théorèmes 5.4 et 6.4 qu'un endomorphisme est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul. On obtient donc le

Corollaire 11.1. *Un endomorphisme a la valeur propre λ si et seulement le déterminant de $f - \lambda \text{id}$ est nul.*

Corollaire 11.2. *Les valeurs propres d'une matrice (resp. d'un endomorphisme) sont les racines du polynôme caractéristique.*

Définition 11.3. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de V . Le sous-espace propre associé à λ est $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.*

Autrement dit, c'est l'ensemble des $v \in V$ tels que $f(v) = \lambda v$. Ce sous-espace n'est jamais nul, λ étant supposé être une valeur propre. Remarquez que si 0 est une valeur propre de f (c'est-à-dire, f est non injectif), alors le sous-espace propre associé est le noyau de f .

Exemple 11.1. *Soit $f(x, y) = (x, 2y)$. La matrice de cet endomorphisme de \mathbb{K}^2 dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(x - 1)(x - 2)$ et les valeurs propres sont donc 1, 2. Les sous-espaces propres associés sont $\mathbb{K}e_1$ et $\mathbb{K}e_2$. L'espace a une base constitué de vecteurs propres, donc f est diagonalisable (voir plus loin pour la définition).*

Exemple 11.2. *Cette fois, $f(x, y) = (x + y, y)$. La matrice est $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(x - 1)^2$. L'unique valeur propre est 1, et le sous-espace propre associé est le noyau de l'endomorphisme $(x, y) \mapsto (y, 0)$, c'est-à-dire $\mathbb{K}e_1$.*

Exemple 11.3. *Soit \mathbb{C} vu comme un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Il est de dimension 2, avec base 1 et i . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C} défini par $f(z) = iz$. Sa*

matrice dans la base ci-dessus est $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $x^2 + 1$, il n'y a pas de valeurs propres (sur \mathbb{R}).

Proposition 11.2. *La somme des sous-espaces propres d'un endomorphisme est une somme directe.*

Lemme 11.1. *Soient P_1, \dots, P_k des polynômes premiers entre eux deux à deux, et P leur produit. Soit f un endomorphisme. Alors $\text{Ker}(P(f))$ est la somme directe des sous-espaces $\text{Ker}(P_i(f))$, $i = 1, \dots, k$.*

Démonstration. Cas $k = 2$: théorème de Bezout. Cas général : récurrence sur k . □

Preuve de la proposition 11.2. On applique le lemme aux polynômes $x - \lambda$, λ valeur propre de l'endomorphisme : ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux. □

Exercice 11.1. *Montrer que f est un automorphisme si et seulement si 0 n'est pas vecteur propre de f .*

Exercice 11.2. *Montrer que si f est un automorphisme et λ une valeur propre de f , alors λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1} . Comparer les vecteurs propres de f et f^{-1} .*

Exercice 11.3. *Si λ est une valeur propre de f , et $P(x)$ un polynôme, montrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$ (commencer par $P(x) = x^n$).*

Exercice 11.4. *soit f un endomorphisme de V , v un vecteur non nul et D le sous-espace $D = \text{Vect}(v)$. Montrer que D est stable sous f si et seulement si v est un vecteur propre de f .*

12 Diagonalisation

Définition 12.1. *Un endomorphisme de V est diagonalisable si V a une base constituée de vecteurs propres de f .*

Proposition 12.1. *Un endomorphisme f de V est diagonalisable si et seulement si V a une base où la matrice de f est diagonalisable.*

Démonstration. C'est direct, en utilisant la définition de la matrice d'un endomorphisme. □

Corollaire 12.1. *f est diagonalisable si seulement sa matrice est conjuguée à une matrice diagonale.*

Démonstration. Utiliser le corollaire 5.1. □

Par définition, une matrice est dite *diagonalisable* si elle est conjuguée à une matrice diagonale. De manière équivalente (par le corollaire), l'endomorphisme qu'elle représente est diagonalisable.

Proposition 12.2. *Un endomorphisme de V est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est V .*

Démonstration. Si f est diagonalisable, il a une base constituée de vecteurs propres. Tout vecteur v est combinaison linéaire de ces vecteurs. Comme toute combinaison linéaire de vecteurs propres correspondant à la valeur propre λ est un vecteur propre pour λ , qui est dans $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$, on en déduit que v est dans la somme des $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$, les sous-espaces propres de f .

Réciproquement, si V est somme des sous-espaces propres, c'est une somme directe (proposition 11.2). Une base de V adaptée à cette somme directe nous fournit donc une base de vecteurs propres de f . □

Théorème 12.1. *Si le polynôme caractéristique de f est égal à $\prod_{1 \leq i \leq n} (x - \lambda_i)$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts, alors f est diagonalisable.*

La réciproque du théorème n'est pas vraie cependant, comme le montre l'endomorphisme identité.

On peut exprimer l'hypothèse du théorème de la manière suivante : le polynôme caractéristique de f est scindé et n'a que des racines simples.

Démonstration. D'après le lemme 11.1, V est somme directe des $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$, et on applique la proposition 12.2. □

Exercice 12.1. *Pour l'endomorphisme dont la matrice est donnée en l'exercice 10.3, calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres. Est-il diagonalisable ?*

Exercice 12.2. *Montrer qu'un endomorphisme idempotent est diagonalisable (voir l'exercice 7.2).*

Exercice 12.3. *Calculer les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 12.4. Calculer les valeurs propre de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Montrer qu'elle est diagonalisable.

Exercice 12.5. On considère un endomorphisme f dont la matrice dans la base v_1, \dots, v_n est diagonale, avec des éléments diagonaux λ_i distincts. Soit g un endomorphisme qui commute avec f . Montrer que $f(g(v_i)) = \lambda_i g(v_i)$. En déduire qu'il existe $a_i \in \mathbb{K}$ tel que $g(v_i) = a_i v_i$ et que g est diagonalisable. Indication : le sous-espace propre de f pour λ_i est de dimension 1.

13 Polynôme minimal

Définition 13.1. Le polynôme minimal d'une matrice carrée M (resp. d'un endomorphisme f) est le polynôme de la forme $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, de degré n minimum, tel que $P(M) = M^n + a_1 M^{n-1} + \dots + a_1 M + a_0 I = 0$ (resp. $P(f) = f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{id} = 0$).

Ce polynôme est unique : car si $P(x) = x^n + \dots$ et $Q(x) = x^n + \dots$ sont deux polynômes distincts tels que $P(M) = Q(M) = 0$, on trouve que $(P - Q)(M) = 0$, $P - Q \neq 0$, et on en déduit un polynôme de degré plus petit.

Remarquons aussi que si un polynôme non nul Q satisfait $Q(f) = 0$ (ou $Q(M) = 0$), alors $\deg(Q)$ est \geq au degré du polynôme minimal (diviser Q par son coefficient dominant).

Exemple 13.1. Le polynôme minimal de la matrice identité est $x - 1$. Celui de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ est $(x - 1)(x - 2)$. Celui de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est $(x - 1)^2$. On vérifie en effet pour ces deux matrices que le polynôme minimal ne peut être de degré 1 (donc de la forme $x - a, a \in \mathbb{K}$).

Proposition 13.1. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Démonstration. Soit A le polynôme caractéristique et B le polynôme minimal. On fait la division euclidienne du premier par le second : $A = BQ + R$, où $\deg(R) < \deg(B)$. On a alors, par le théorème 10.1, et par définition du polynôme minimal : $0 = A(f) = B(f)Q(f) + R(f) = R(f)$ et on doit avoir $R = 0$ par minimalité du degré du polynôme minimal. \square

La même preuve démontre le

Corollaire 13.1. *Si M est une matrice et A un polynôme tel/le que $A(M) = 0$, alors A est un multiple du polynôme minimal.*

Corollaire 13.2. *Si le polynôme caractéristique est scindé le polynôme minimal aussi.*

Démonstration. En effet un polynôme qui divise un polynôme scindé est scindé. \square

Proposition 13.2. *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal.*

Démonstration. Toute racine du polynôme du polynôme minimal est une racine du polynôme caractéristique, car celui-là divise celui-ci, d'après la proposition précédente. Donc toute racine du polynôme minimal est une valeur propre (corollaire 11.2).

Réciproquement, soit λ une valeur propre de f , et v une valeur propre associée. Alors $f(v) = \lambda v$. Il existe une base $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ de V . La matrice de f dans cette base a la forme triangulaire par blocs $M = \begin{bmatrix} \lambda & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$.

Si $P(x)$ est le polynôme minimal, on a $P(M) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & B' \\ 0 & P(D) \end{bmatrix}$. Donc $P(\lambda) = 0$. \square

Théorème 13.1. *Un endomorphisme (resp. une matrice) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.*

Démonstration. Le polynôme minimal d'une matrice diagonale est $\prod_{\lambda}(x - \lambda)$, où le produit est sur tous les λ sur la diagonale, sans répétition. Ce polynôme est scindé et n'a que des racines simples. On en déduit une des implications du théorème.

Réciproquement, supposons que le polynôme minimal de $f \in \text{End}(V)$ est scindé et n'a que des racines simples. On applique alors le lemme 11.2. \square

Exercice 13.1. *Quel est le polynôme minimal de la matrice diagonale dont la diagonale est 1, 1, 1, 1, 2, 2 ?*

Exercice 13.2. *Plus généralement : une matrice diagonale dont la diagonale est a_1, \dots, a_k ?*

Exercice 13.3. *Calculer le polynôme minimal de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.*

Exercice 13.4. On suppose que M est la matrice (1). Montrer que son polynôme minimal est le plus petit multiple commun des polynômes minimaux des M_i .

14 Triangularisation

Définition 14.1. Un endomorphisme est triangularisable s'il existe une base où sa matrice est triangulaire. Une matrice est triangularisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire.

De manière analogue, une matrice est triangularisable si et seulement si elle est la matrice d'un endomorphisme triangularisable.

Théorème 14.1. Une matrice (resp. un endomorphisme) est triangularisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Démonstration. Soit f un endomorphisme de V , espace de dimension n .

Si la matrice de f dans une base de V est triangulaire, alors son polynôme caractéristique est scindé, car c'est le produit de $x - a$ pour tous les éléments diagonaux a de la matrice. Donc le polynôme minimal aussi (corollaire 13.2).

Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé, alors f a au moins une valeur propre λ (proposition 13.2). Soit v un vecteur propre associé et $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ une base de V . Dans cette base, la matrice de f a la forme triangulaire par blocs $M = \begin{bmatrix} \lambda & l \\ 0 & D \end{bmatrix}$, où l est une matrice ligne de longueur $n - 1$, et D une matrice carrée d'ordre $n - 1$. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 13.2, on voit $P(D) = 0$, où P est le polynôme minimal de f . Donc le polynôme minimal de D est scindé. En raisonnant par récurrence sur la dimension, on obtient que D est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure : $GDG^{-1} = T$. Alors $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & l \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & l \\ 0 & GD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & lG^{-1} \\ 0 & GDG^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & lG^{-1} \\ 0 & T \end{bmatrix}$, qui est triangulaire supérieure. Comme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{bmatrix}$, on voit que M est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure. Donc par changement de base, f a une matrice triangulaire supérieure. □

Corollaire 14.1. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration. Si le polynôme caractéristique est scindé, le polynôme minimal aussi (corollaire 13.2). Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé, nous pouvons supposer que f a, dans une certaine base, une matrice triangulaire. Le polynôme caractéristique de cette matrice est scindé, car c'est le produit de $x - a$ pour tous les éléments diagonaux a de la matrice ; celui de f est donc aussi scindé. \square

Le théorème fondamental de l'algèbre implique le

Corollaire 14.2. *Si le corps de base est \mathbb{C} , tout endomorphisme et toute matrice carrée est triangularisable.*

Exercice 14.1. *Montrer que la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ est triangularisable sur \mathbb{R} mais pas sur \mathbb{Q} .*

Exercice 14.2. *Montrer que la matrice de f dans la base v_1, \dots, v_n est triangulaire supérieure si et seulement si elle est triangulaire inférieure dans la base v_n, \dots, v_1 .*

Exercice 14.3. *Montrer que la matrice de f dans la base v_1, \dots, v_n est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $j = 1, \dots, n$, $f(v_j) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$.*

Exercice 14.4. *Quelle est la condition dans l'exercice précédent si on remplace "triangulaire supérieure" par "triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale" ? Montrer qu'alors $f^n = 0$.*

Exercice 14.5. *Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'une matrice strictement triangulaire (= triangulaire avec des 0 sur la diagonale) est nilpotente.*

Exercice 14.6. *Soit M une matrice unipotente, c'est-à-dire $M = I_n + N$, où N est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. Montrer que M est inversible, d'inverse $I_n - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$.*

Exercice 14.7. *On considère l'espace vectoriel des polynômes en la variable x et de degré au plus $n - 1$. Montrer que l'opération de dérivation est un endomorphisme dont la matrice dans la base $1, x, \dots, x^{n-1}$ est triangulaire.*

Exercice 14.8. *On considère l'espace vectoriel des matrices 2 fois 2, avec sa base des matrices élémentaires E_{ij} , $i, j = 1, 2$. Soit f l'endomorphisme de cet espace défini par $f(M) = ME_{12}$. Montrer qu'en ordonnant la base comme il faut, la matrice de f est triangulaire.*

15 Sous-espaces caractéristiques

Définition 15.1. Soit f un endomorphisme dont le polynôme minimal est scindé, de la forme $\prod_{1 \leq i \leq k} (x - a_i)^{n_i}$, $n_i \geq 1$. Le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre a_i est $\text{Ker}(f - a_i \text{id})^{n_i}$.

Proposition 15.1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre a_i est contenu dans le sous-espace caractéristique associé à cette valeur propre

Démonstration. □

Théorème 15.1. Soit f un endomorphisme de V dont le polynôme minimal est scindé. Alors V est somme directe des sous-espaces caractéristiques de f .

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 11.2, car les polynômes $x - a_i$ sont deux à deux premiers entre eux. □

Proposition 15.2. Tout sous-espace caractéristique f est stable sous f .

Démonstration. On va montrer plus généralement que si $P(x)$ est un polynôme, alors $\text{Ker}(P(f))$ est stable sous f . Prenons en effet un $v \in \text{Ker}(P(f))$. Alors $P(f)(v) = 0$. Or $f \circ P(f) = (xP(x))(f) = (P(x)x)(f) = P(f) \circ f$. Donc $0 = f(P(f)(v)) = P(f)(f(v))$ et par suite $f(v) \in \text{Ker}(P(f))$. □

En appliquant la proposition 7.4, on obtient le

Corollaire 15.1. Dans une base adaptée à la somme directe du théorème 15.1, la matrice de f est diagonale par blocs.

Théorème 15.2. Soit f un endomorphisme dont le polynôme caractéristique $P(x)$ est scindé : $P(x) = \prod_{i=1}^{i=p} (x - \alpha_i)^{d_i}$, où les α_i sont distincts. Alors la dimension du sous-espace caractéristique correspondant à α_i est d_i .

Notons que d_i est la multiplicité de α_i en tant que racine du polynôme caractéristique P . On l'appelle la *multiplicité* de la valeur propre α_i .

Démonstration. Soit $\prod_{i=1}^{i=p} (x - \alpha_i)^{m_i}$ le polynôme minimal de f . Soit $V_i = \text{Ker}((f - \alpha_i \text{id})^{m_i})$ le sous-espace caractéristique correspondant à la valeur propre α_i . Soit f_i la restriction de f à V_i : elle envoie V_i dans lui-même. On a $(f_i - \alpha_i \text{id}_{V_i})^{m_i} = 0$ (proposition 7.5), donc le polynôme minimal de f_i divise $(x - \alpha_i)^{m_i}$ et par suite la seule valeur propre de f_i est α_i . Posons

$e_i = \dim(V_i)$. Alors le polynôme caractéristique de f_i est $(x - \alpha_i)^{e_i}$. Il s'ensuit, par le corollaire 15.1 et l'exercice 10.4, que le polynôme caractéristique de f est $\prod_{i=1}^{i=p} (x - \alpha_i)^{e_i}$, et donc $\dim(V_i) = e_i = d_i$. \square

Théorème 15.3. *Soit f un endomorphisme dont le polynôme minimal est scindé. Alors f est somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent qui commutent.*

Démonstration. Soit V_i le sous-espace caractéristique correspondant à la valeur propre α_i . Définissons f_i comme dans la preuve précédente, et aussi les endomorphismes g_i, h_i de V_i par : $g_i(v) = \alpha_i v$, $h_i(v) = f_i(v) - g_i(v)$. Puisque $(f_i - \alpha_i \text{id}_{V_i})^{m_i} = 0$, on a $h_i^{m_i} = 0$. De plus g_i et h_i commutent, car g_i est un multiple scalaire de l'identité de V_i .

Définissons maintenant g, h par $g(v_1 + \dots + v_p) = g_1(v_1) + \dots + g_p(v_p)$ et $h(v_1 + \dots + v_p) = h_1(v_1) + \dots + h_p(v_p)$ pour tous $v_i \in V_i$. Comme la somme des V_i est directe, ceci est bien défini. On vérifie alors que h nilpotent, $gh = hg$ et $f = g + h$. \square

Exercice 15.1. *Montrer que si f et g commutent, alors $\text{Ker}(g)$ est stable sous f .*

Exercice 15.2. *On considère une filtration de V , c'est-à-dire une suite croissante de sous-espaces $V_1 \subset \dots \subset V_p = V$. Soit $d_i = \dim(V_i) - \dim(V_{i-1})$, où l'on pose $V_0 = 0$. Une base adaptée à cette filtration est une base v_1, \dots, v_n de V telle que les $d_1 + \dots + d_i$ éléments de cette base forment une base de V_i . Montrer qu'une telle base existe. Montrer que si f est un endomorphisme stabilisant chaque V_i , alors la matrice de f dans une base adaptée est triangulaire par blocs.*

Exercice 15.3. *On suppose que le polynôme minimal est $\prod_{i=1}^{i=p} (x - \alpha_i)^{m_i}$, et que le polynôme caractéristique est $\prod_{i=1}^{i=p} (x - \alpha_i)^{d_i}$, avec des α_i distincts. Montrer que $m_i \leq d_i$ et que $\text{Ker}(f - \alpha_i \text{id})^{m_i} = \text{Ker}(f - \alpha_i \text{id})^{d_i}$.*

Exercice 15.4. *Aquelle condition les sous-espaces caractéristiques sont-ils égaux aux sous-espaces propres ?*

16 Espaces cycliques et matrice compagne

Définition 16.1. *Soit $f \in \text{End}(V)$. On dit que V est cyclique sous l'action de f s'il existe un vecteur v tel que $V = \text{Vect}(v, f(v), f^2(v), \dots, f^p(v), \dots)$.*

Autrement dit, tout vecteur w dans V est combinaison linéaire des vecteurs $f^i(v)$, $i \in \mathbb{N}$. Attention : cela signifie que w est combinaison linéaire d'un *ensemble fini* de vecteurs de la forme $f^i(v)$.

Prenons un exemple : V avec base e_1, e_2 et endomorphisme $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_1 + e_2$. Alors $v, f(v)$ engendrent V (car $v = e_2, f(v) = e_1 + e_2$); donc tout vecteur w dans V est combinaison linéaire des vecteurs $f^i(v)$, $i \in \mathbb{N}$.

Proposition 16.1. *Dans les conditions de la définition ci-dessus, si $n = \dim(V)$, alors $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ est une base de V .*

Lemme 16.1. *Soient $v_0, v_1, v_2, \dots, v_N$ des vecteurs linéairement dépendants d'un espace vectoriel. Il existe alors k tel que v_k soit linéairement dépendant de v_0, v_1, \dots, v_{k-1} .*

Démonstration. Exercice. □

Preuve de la proposition 16.1. Il est certain que les vecteurs $v, f(v), \dots, f^n(v)$ sont linéairement dépendants : car ce sont $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n . Donc il existe par le lemme k tel que $f^k(v)$ est combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$. Prenons k le plus petit possible. Alors les vecteurs $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$ sont linéairement indépendants. En effet, dans le cas contraire, on a une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$, donc par le lemme l'un des vecteurs $f^i(v)$ ($i \leq k - 1$) est combinaison linéaire des vecteurs $v, f(v), \dots, f^{i-1}(v)$, contradiction avec la minimalité de k .

Nous montrons plus loin qu'alors tout vecteur $f^i(v)$ est combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$. Donc ces k vecteurs engendrent $\text{Vect}(v, f(v), f^2(v), \dots, f^p(v), \dots)$; cet espace est par hypothèse égal à V . Donc ces vecteurs forment une base de V . Ceci implique $k = n$ et le lemme.

Il reste à montrer que tout vecteur $f^i(v)$ est combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$. C'est clair pour $i = 0, \dots, k$. Supposons que ce soit vrai pour $i \geq k$. Alors $f^i(v)$ est combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$; en appliquant f , on trouve que $f^{i+1}(v)$ est combinaison linéaire de $f(v), \dots, f^k(v)$; comme $f^k(v)$ est combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$, on en déduit que $f^{i+1}(v)$ est combinaison linéaire de $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$, et on conclut par récurrence sur i . □

Théorème 16.1. *Dans la base de la proposition précédente, la matrice de*

f est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

où $x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \alpha_1x - \alpha_0$ est le polynôme caractéristique et minimal de f .

Par exemple, pour $n = 2$ et $n = 3$, les matrices sont $\begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$.

Démonstration. Posons $e_i = f^{i-1}(v)$. Alors e_1, \dots, e_n est une base de V . De plus pour $i < n$, on a $f(e_i) = f(f^{i-1}(v)) = f^i(v) = e_{i+1}$, et $f(e_n)$ est combinaison linéaire de e_1, \dots, e_n : $f(e_n) = \alpha_0e_1 + \dots + \alpha_{n-1}e_n$. On en déduit la forme de la matrice dans la base.

Pour le reste, voir l'exercice 16.3. \square

On appelle *matrice compagne* du polynôme $x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \alpha_1x - \alpha_0$ la matrice (2). Réciproquement, ce polynôme s'appelle le *polynôme compagne* de la matrice ci-dessus.

Exercice 16.1. Soit M une matrice et P son polynôme caractéristique. A quelle condition M est-elle égale à la matrice compagne de P ? Vérifier que l'égalité n'est pas vraie pour $M = I_2$.

Exercice 16.2. Déterminer la matrice compagne du polynôme $x^2 - x - 1$. Calculer les puissances de cette matrice en fonction des nombres de Fibonacci F_n définis récursivement par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.3. Soit M la matrice (2) et f l'endomorphisme associé de \mathbb{K}^n . Soit e_1, \dots, e_n la base canonique, et $v = e_1$. Montrer que $f^i(v) = e_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, n-1$. En déduire que les endomorphismes $\text{id}, f, \dots, f^{n-1}$ sont linéairement indépendants. En déduire que le polynôme minimal est de degré $\geq n$. En déduire qu'il est égal au polynôme caractéristique, lequel est $x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \alpha_1x - \alpha_0$.

17 Forme de Jordan

17.1 Cas nilpotent

Soit f un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire dont une certaine puissance est nulle.

Définition 17.1. Une base de Jordan pour f est une base de la forme $v_{1,1}, \dots, v_{1,n_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,n_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k}$, telle que $f(v_{ij}) = v_{i,j+1}$, avec la convention $v_{i,n_i+1} = 0$.

Par exemple, $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{31}, v_{32}$ (avec $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 2$) et $f(v_{11}) = v_{12}, f(v_{12}) = v_{13}, f(v_{13}) = 0, f(v_{21}) = 0, f(v_{31}) = v_{32}, f(v_{32}) = 0$.

Il est commode de représenter ceci par un *graphe orienté*

$$\begin{array}{l} v_{11} \mapsto v_{12} \mapsto v_{13} \mapsto 0 \\ v_{21} \mapsto 0 \\ v_{31} \mapsto v_{32} \mapsto 0 \end{array}$$

Ce graphe est une réunion de *chaînes*. Appelons *bloc de Jordan nilpotent* une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Par exemple, pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, les blocs de Jordan nilpotents

sont $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Lemme 17.1. Soit f un endomorphisme nilpotent. Dans une base de Jordan pour f , la matrice de f est une somme diagonale de blocs de Jordan nilpotents. Réciproquement, si la matrice de f dans une certaine base est une somme diagonale de blocs de Jordan nilpotents, alors cette base est une base de Jordan pour f .

Démonstration. Un exemple suffira. La matrice de l'endomorphisme de

l'exemple ci-dessus est

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

□

Nous sommes sur le chemin qui va démontrer le

Théorème 17.1. *Soit $f \in \text{End}(V)$ nilpotent. Il existe une base de Jordan pour f , dans laquelle sa matrice est une somme diagonale de blocs de Jordan nilpotents. Cette matrice est unique à l'ordre près des blocs.*

Remarquons que l'unicité dans le théorème est équivalente à ceci : le *multi-ensemble* des tailles des blocs de Jordan est unique. Dans notre exemple, le multi-ensemble est $\{1, 2, 3\}$ (qui est un ensemble). Un autre exemple est $\{1, 1, 2, 3, 3\}$, ce qui signifie que la matrice a deux blocs de Jordan de taille 1, un seul de taille 2, et 2 blocs de taille 3. Ce multi-ensemble est appelé le *type* de la base de Jordan ; avec les notations de la définition 17.1, le type est $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$.

Pour prouver l'unicité nous avons besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 17.2. *Soit B la base de Jordan de la définition 17.1. Alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_{1,n_1}, v_{2,n_2}, \dots, v_{k,n_k})$. En particulier $\dim(\text{Ker}(f)) = k =$ le nombre de chaînes dans la base de Jordan.*

Démonstration. Il est clair que les v_{i,n_i} sont dans le noyau, donc une inclusion est claire. Une fois n'est pas coutume, nous allons faire la preuve de l'inclusion réciproque sur l'exemple courant. La généralisation devrait être évidente. Soit $v \in \text{Ker}(f)$. Alors $v = av_{11} + bv_{12} + cv_{13} + dv_{21} + ev_{31} + gv_{32}$. Alors $0 = f(v) = av_{12} + bv_{13} + ev_{32}$, ce qui implique que $a = b = e = 0$. Donc $v = cv_{13} + dv_{21} + gv_{32} \in \text{Vect}(v_{13}, v_{21}, v_{32})$, ce qu'on voulait démontrer. □

Lemme 17.3. *Soit p un entier ≥ 1 . Alors $\dim(\text{Ker}(f^p)) = a_1 + \dots + a_p$, où a_i est le nombre de n_i qui sont plus grand ou égal à i .*

Démonstration. 1. Commençons par supposer que $k = 1$, c'est-à-dire : il y a une seule chaîne dans la base de Jordan. Supposons que la chaîne soit de longueur n : $v_1 \mapsto v_2 \mapsto \dots \mapsto v_n \mapsto 0$. Le noyau de f est le sous-espace

engendré par v_n , le noyau de f^2 est engendré par v_n, v_{n-1} ; si $p \leq n$, le noyau de f^p est engendré par $v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-p+1}$, et si $p > n$, il est engendré par tous les v_i . On voit donc que $\text{Ker}(f^p)$ est de dimension $a_1 + \dots + a_p$, car $a_p = 1$ si $p \leq n$, et $a_p = 0$ si $p > n$.

2. Supposons maintenant k quelconque. Chaque chaîne de la base de Jordan définit un sous-espace stable sous f , et donc sous f^p . L'espace V est somme directe de ces sous-espaces.

Le lemme se déduit alors du résultat suivant : soit g un endomorphisme de V et supposons que V soit somme directe des V_i , $i = 1, \dots, k$, qui sont chacun stable sous g . Alors $\text{Ker}(g)$ est somme directe des noyaux des restrictions de g aux sous-espaces V_i . \square

Lemme 17.4. *Deux bases de Jordan pour f ont toujours le même type.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le type d'une base de Jordan de f ne dépend que de f . Mais f détermine entièrement les nombres $\text{Ker}(f^p)$ pour tout $p \geq 1$. Donc f détermine entièrement les nombres $a_1 + \dots + a_p$ du lemme précédent, et par suite les nombres a_p .

Mais on a $k =$ le nombre de chaînes dans la base de Jordan $= a_1$. De plus $a_2 =$ le nombre de n_i qui sont ≥ 2 , donc $a_1 - a_2 =$ le nombre de n_i qui sont égaux à 1. De plus, a_3 est le nombre de n_i qui sont égaux à ≥ 3 , donc $a_2 - a_3 =$ le nombre de n_i qui sont égaux à 2 etc...

Donc la donnée de f détermine entièrement le nombre de n_i qui sont égaux à un entier donné, donc le type de la base de Jordan. \square

Lemme 17.5. *Soit $V = E + L$, où E, L sont des sous-espaces de V et e_1, \dots, e_n une base de E . Il existe des vecteurs l_1, \dots, l_p dans L tels que $e_1, \dots, e_n, l_1, \dots, l_p$ forment une base de V .*

Démonstration. Soit $l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_q$ une base de L telle que l_{p+1}, \dots, l_q soit une base de $E \cap L$. Alors $e_1, \dots, e_n, l_1, \dots, l_p$ forment une base de V . La vérification est laissée en exercice. \square

Preuve du théorème 17.1. Le lemme 17.5 implique l'unicité, car si dans une certaine base, f a une matrice qui est une somme diagonale de blocs de Jordan nilpotent, alors cette base est une base de Jordan pour f (lemme 17.1).

Pour l'existence d'une base de Jordan, nous raisonnons sur l'exposant de nilpotence, le plus petit $r \geq 1$ tel que $f^r = 0$. Le cas $r = 1$ est évident : n'importe quelle base est une base de Jordan, avec tous les $n_i = 1$.

Pour le cas général, supposons $r \geq 2$. Soit $W = \text{Im}(f)$. Alors W est stable sous f . Soit g la restriction de f à W : on a $g \in \text{End}(W)$ et $g^{r-1} = 0$.

En effet, si $w \in W$, alors $w = f(v)$ et l'on a $g^{r-1}(w) = f^{r-1}(w) = f^r(v) = 0$. Donc l'exposant de nilpotence de g est $< r$. Par hypothèse de récurrence, W possède une base de Jordan pour g :

$$\begin{array}{c} w_{11} \mapsto w_{12} \mapsto \dots \mapsto w_{1,n_1} \\ \dots \\ w_{k1} \mapsto w_{k2} \mapsto \dots \mapsto w_{k,n_k} \end{array}$$

où les flèches indiquent l'action de g , donc de f . On va compléter cette base de W en une base de V , qui sera une base de Jordan pour f . Les vecteurs w_{11}, \dots, w_{k1} sont dans $W = \text{Im}(f)$. Il existe donc des vecteurs v_1, \dots, v_k dans V tels que $f(v_1) = w_{11}, \dots, f(v_k) = w_{k1}$. Nous obtenons le graphe, où les flèches indiquent l'action de f :

$$\begin{array}{c} v_1 \mapsto w_{11} \mapsto w_{12} \mapsto \dots \mapsto w_{1,n_1} \\ \dots \\ v_k \mapsto w_{k1} \mapsto w_{k2} \mapsto \dots \mapsto w_{k,n_k} \end{array}$$

cela ressemble fort à une base de Jordan pour f , mais il manque quelque chose. Nous prouvons plus bas que tous ces vecteurs v_i et w_{ij} sont linéairement indépendants. Notons E l'espace qu'ils engendrent. Nous montrons plus bas aussi que $V = E + \text{Ker}(f)$. Le lemme implique qu'il existe des vecteurs l_1, \dots, l_p dans $\text{Ker}(f)$ tels que ceux-ci, joints à tous les v_i et w_{ij} , est une base de V . C'est une base de Jordan pour f , car $f(l_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

1. Montrons que les vecteurs v_i et w_{ij} sont linéairement indépendants. Une relation de dépendance linéaire s'écrit $\sum_i a_i v_i + \sum_{i,j} b_{i,j} w_{i,j} = 0$. Appliquons f : $\sum_i a_i w_{i,1} + \sum_{i,j} b_{i,j} w_{i,j+1} = 0$, avec la convention $w_{i,n_i+1} = 0$. Il s'ensuit que tous les a_i sont nuls, et revenant à l'égalité précédente, que tous les b_{ij} sont nuls.

2. Montrons que $f(E) = W$. Comme W est l'image de f , on a $f(E) \subset W$. Réciproquement, on sait que W est engendré par les w_{ij} . Donc si $w \in W$, $w = \sum_{ij} b_{ij} w_{ij} = f(\sum_{ij} b_{ij} w_{i,j-1})$, en posant $w_{i,0} = v_i$. Donc $w \in f(E)$ et donc $W \subset f(E)$.

3. Montrons que $V = E + \text{Ker}(f)$. Soit donc $v \in V$. Alors $f(v) \in \text{Im}(f) = W = f(E)$, donc il existe $e \in E$ tel que $f(v) = f(e)$. Par suite $v - e \in \text{Ker}(f)$ et donc $v = e + (v - e) \in E + \text{Ker}(f)$. \square

Exercice 17.1. On considère un graphe orienté $G = (S, A)$, où S est l'ensemble fini des sommets de G et $A \subset S \times S$ l'ensemble de ses arêtes. Un chemin de longueur k dans G est une suite d'arêtes a_1, \dots, a_k telle que

$a_i = (s_i, t_i)$ et $t_i = s_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, k-1$. Supposons pour simplifier que $S = \{1, \dots, n\}$. La matrice d'adjacence de $M = (m_{ij})$ de G est la matrice définie par $m_{ij} = 1$ si (i, j) est une arête, $= 0$ sinon. Montrer par récurrence sur k que le coefficient ij de M^k est égal au nombre de chemins dans G de longueur k .

Exercice 17.2. Montrer que la matrice d'adjacence du graphe associé à une base de Jordan est le bloc de Jordan correspondant, si l'on numérote les sommets de manière adéquate. Calculer ses puissances en utilisant l'exercice précédent.

Exercice 17.3. Soit V un espace vectoriel ayant une base de quatre vecteurs u, v, w, x , et f un endomorphisme nilpotent de V ayant la base de Jordan avec la chaîne associée $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow 0$; ce qui signifie que l'endomorphisme f satisfait : $f(u) = v, f(v) = w, f(w) = x, f(x) = 0$.

a) trouver une base du noyau de f , et sa dimension.

b) trouver une base du noyau de f^2 (la composée de f avec elle-même), et sa dimension.

c) trouver une base du noyau de f^3 , et sa dimension.

d) trouver une base du noyau de f^4 , et sa dimension.

e) qu'en est-il des autres puissances de f ?

Exercice 17.4. Supposez qu'on vous dit qu'un endomorphisme f nilpotent de l'espace vectoriel V satisfait à : a) $\text{Ker}(f)$ est de dimension 8 ; b) $\text{Ker}(f^2)$ est de dimension 11 ; c) $f^2 = 0$. Trouver le graphe d'une base de Jordan de f ; c'est-à-dire, déterminer les longueurs des chaînes de cette base, et le nombre de chaînes de chaque longueur.

Indications : quelle est la dimension de V ? Quelle est la longueur maximum d'une chaîne ?

Exercice 17.5. On a un endomorphisme nilpotent f de V qui satisfait : $\dim(\text{Ker}(f)) = 6$; $\dim(\text{Ker}(f^2)) = 10$; $\dim(\text{Ker}(f^3)) = 12$; $\dim(\text{Ker}(f^4)) = 13$; $f^4 = 0$.

Déterminer le type d'une base de Jordan pour f .

Exercice 17.6. On considère une base de Jordan de f nilpotent. Calculer les dimensions des images des puissances de f . Quel est le plus petit r tel que $f^r = 0$?

Exercice 17.7. Soit $f \in \text{End}(V)$, avec $n = \dim(V)$, et on suppose que le plus petit r tel que $f^r = 0$ est n . Quelle est la forme de Jordan de f ?

Exercice 17.8. Soit $f \in \text{End}(V)$, avec $n = \dim(V)$, et on suppose que le plus petit r tel que $f^r = 0$ est $n - 1$. Quelle est la forme de Jordan de f ?

Exercice 17.9. On considère l'espace vectoriel V de base a, b, c, d et $f \in \text{End}(V)$ tel que $f(a) = b, f(c) = b, f(b) = d, f(d) = 0$. Trouver une base de Jordan pour f .

Exercice 17.10. L'exposant de nilpotence d'une matrice carrée M est le plus petit n tel que $M^n = 0$. Déterminer l'exposant de nilpotence de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En déduire la forme de Jordan de cette matrice.

Exercice 17.11. Dans l'exercice précédent, prenons $n = 3$. Pour l'endomorphisme f associé, montrer qu'il existe une base u, v, w de l'espace ambiant tel que $f(u) = v + w, f(v) = w, f(w) = 0$. Montrer que $u, v + w, w$ est une base de Jordan pour f . Généraliser pour $n \geq 4$.

Exercice 17.12. Montrer que le type d'un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension 1, 2 ou 3 est entièrement déterminé par son exposant de

nilpotence. Appliquer ceci pour déterminer le type des matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 17.13. Montrer par un exemple que le résultat de l'exercice précédent n'est plus vrai en dimension 4 (énumérer les types et déterminer l'exposant de nilpotence dans chaque cas).

17.2 Forme de Jordan : cas général

Définition 17.2. *Un bloc de Jordan de valeur propre λ et d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n de la forme*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Autrement dit, on a des λ sur la diagonale, des 1 sur la diagonale juste en-dessous, et des 0 partout ailleurs. Si $\lambda = 0$, c'est un bloc de Jordan nilpotent.

Théorème 17.2. *Pour tout endomorphisme f de V dont le polynôme minimal est scindé, il existe une base où la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant un bloc de Jordan. Cette matrice est unique à l'ordre près des blocs.*

Une matrice qui est somme diagonale de blocs de Jordan est dite *sous forme de Jordan*. Trouver une telle base et calculer la matrice, c'est *mettre f sous forme de Jordan*.

Exemples : si f est diagonalisable, sa forme de Jordan est une matrice diagonale ; les blocs de Jordan sont tous de taille 1.

Lemme 17.6. *Soit M une matrice somme diagonale de blocs de Jordan J_k , $k = 1, \dots, p$, d'ordre n_k et valeur propre λ_k . Alors le polynôme caractéristique de M est $\prod_{1 \leq k \leq p} (x - \lambda_k)^{n_k}$ et son polynôme minimal est $\prod_{\lambda} (x - \lambda)^{m_\lambda}$, où ce produit est sur toutes les valeurs propres distinctes λ de f et où $m_\lambda = \max\{n_k, \lambda_k = \lambda\}$.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de M est le produit des polynômes caractéristiques des J_k . De plus le polynôme caractéristique d'un bloc de Jordan J , d'ordre n avec valeur propre λ , est $(x - \lambda)^n$, puisque c'est une matrice triangulaire.

Quant aux polynôme minimal, c'est le plus petit multiple commun des polynômes minimaux des blocs (exercice 13.4). \square

Preuve du théorème 17.2. 1. Soit $\prod_{1 \leq i \leq p} (x - \alpha_i)^{a_i}$ le polynôme minimal de f , où les α_i sont distincts et les $a_i \geq 1$. Nous savons que l'espace V est

somme directe des sous-espaces caractéristiques $V_i = \text{Ker}((f - \alpha_i I_n)^{a_i})$ et que chaque V_i est stable sous f . Notons f_i la restriction de f à V_i : $f_i \in \text{End}(V_i)$. Posons $f_i = \alpha_i \text{id}_{V_i} + h_i$. Alors h_i est un endomorphisme nilpotent de V_i . Par le théorème 17.1, il possède donc une base de Jordan $v_{rs} : h_i(v_{rs}) = v_{r,s+1}$ avec $v_{r,n_r+1} = 0$. On a $f_i(v_{rs}) = \alpha_i v_{rs} + v_{r,s+1}$. Donc dans la base des v_{rs} de V_i , la matrice de f_i est une somme diagonale de blocs de Jordan associés à la valeur propre α . L'espace V a pour base la réunion, pour $i = 1, \dots, p$ des bases de Jordan de V_i pour f_i (proposition 7.3). On en déduit par la proposition 7.4 que la matrice de f est une somme diagonale de blocs de Jordan.

2. Unicité (cas d'une seule valeur propre). On suppose que f a une seule valeur propre α . Alors $(f - \alpha \text{id})^n = 0$ et donc $f = \alpha \text{id} + h$, h nilpotent. On est ramené à l'unicité dans le cas nilpotent (théorème 17.1).

3. Unicité (cas général). On se ramène au cas précédent en se restreignant aux sous-espaces caractéristiques. \square

Exercice 17.14. *Quelle est la forme de Jordan les matrices suivantes*

$$(\mathbb{K} = \mathbb{C}) ? \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 17.15. *Soit M une matrice dont le polynôme caractéristique est $(x - a)(x - b)(x - c)$. Montrer que la connaissance du polynôme minimal de M implique celle de sa forme de Jordan.*

Exercice 17.16. *On trouve dans la littérature des blocs de Jordan de la forme*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Autrement dit : les 1 sont au-dessus de la diagonale, au lieu d'être en-dessous comme dans la définition 17.2.

1. Montrer que si $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \cdots \rightarrow e_n \rightarrow 0$ est une chaîne représentant une base de Jordan nilpotente pour l'endomorphisme nilpotent f , alors la

matrice de de f dans la base e_n, \dots, e_2, e_1 (ordre inversé!) est de la forme précédente, avec $\lambda = 0$.

2. Si la matrice de f , dans une certaine base, est une somme diagonale de blocs de Jordan de la forme de la définition 17.2, montrer qu'on peut permuter les éléments de cette base de manière à obtenir une base où la matrice de f est une somme diagonale de matrices de la forme ci-dessus. On peut s'inspirer de l'exercice 14.2.

18 Espaces euclidiens

18.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Définition 18.1. Une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} -espace vectoriel V est une application $B : V \times V \mapsto \mathbb{K}$ telle que pour tout v , les applications $x \mapsto B(x, v)$ et $x \mapsto B(v, x)$ de V dans \mathbb{K} sont linéaires.

Autrement dit : pour tous $x, y, v \in V$ et pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a : $B(x + y, v) = B(x, v) + B(y, v)$, $B(ax, v) = aB(x, v)$, $B(v, x + y) = B(v, x) + B(v, y)$, $B(v, ax) = aB(v, x)$.

Une conséquence entre autres : $B(v, 0) = B(0, v) = 0$.

Exemple : $V = \mathbb{K}^n$, $B((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_i x_i y_i$. Vérifiez que c'est bel et bien une forme bilinéaire.

Il est utile de savoir calculer avec des formes bilinéaires et des combinaisons linéaires : on a, pour tous les vecteurs $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p$ et tous les scalaires $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$, la formule

$$B\left(\sum_i a_i u_i, \sum_j b_j v_j\right) = \sum_{ij} a_i b_j B(u_i, v_j).$$

Vérifiez cette formule : soit par une double récurrence sur n et p , soit en utilisant le fait qu'une application linéaire préserve les combinaisons linéaires. On peut aussi la vérifier pour des petites valeurs de n, p .

Une forme bilinéaire B est dite *symétrique* si $B(u, v) = B(v, u)$ pour tous les vecteurs u, v .

A partir de maintenant nous prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel V est une forme bilinéaire symétrique telle que pour tout vecteur v non nul on a $B(v, v) > 0$. On note usuellement le produit scalaire $\langle u, v \rangle$ au lieu de $B(u, v)$.

Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un *espace euclidien*.

On note alors $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, et on appelle ce nombre positif ou nul la *norme* de u . On a la *relation de polarisation*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle, \quad (3)$$

pour tous les vecteurs x, y . En effet, $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$, ce qui implique la relation, à cause de la symétrie.

On dit que des vecteurs x, y sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Lorsque deux vecteurs x, y sont orthogonaux, la relation de polarisation devient la *relation de Pythagore*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exemple 18.1. 1. Sur \mathbb{R}^n , on a le produit scalaire $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_i x_i y_i$.

2. Sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n , on a le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Vérifier.

Théorème 18.1. (*Inégalité de Cauchy-Schwartz*) Pour tous vecteurs x, y , on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité si et seulement si x, y sont colinéaires.

Rappelons que x, y colinéaires signifie qu'il engendrent un sous-espace de dimension 1.

Démonstration. Si $x = 0$, c'est clair : on a en fait égalité, et x, y sont colinéaires. Supposons donc x non nul. Pour tout t réel, on a $\langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0$. Donc $t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$. Ceci implique que le discriminant de ce polynôme du second degré en t est ≤ 0 . Donc $\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$. Donc $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. On obtient l'inégalité du théorème en prenant les racines carrées.

Si on a égalité, alors le discriminant est nul et il y a une racine réelle t , c'est-à-dire $\langle tx + y, tx + y \rangle = 0$. Donc $tx + y = 0$ et x, y sont colinéaires.

Si x, y sont colinéaires, alors $y = \alpha x$, et on a : $\langle x, y \rangle = \alpha \langle x, x \rangle$ d'une part, et $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = \alpha^2 \langle x, x \rangle^2$ d'autre part. D'où l'égalité. \square

Exercice 18.1. Montrer que si x est un vecteur non nul, alors la norme de $\frac{1}{\|x\|}x$ est 1.

Exercice 18.2. Montrer que sur \mathbb{R}^2 , on a le produit scalaire $\langle (a, b), (a', b') \rangle = aa' + bb' + \frac{1}{2}(ab' + ba')$.

Exercice 18.3. * Montrer que la norme satisfait les propriétés suivantes : $\|ax\| = |a| \|x\|$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Montrer qu'on a égalité dans la dernière inégalité si et seulement si $x = 0$ ou $y = ax$ pour un $a \geq 0$.

18.2 Orthogonalité et bases orthonormales

Une base orthonormale de E , espace euclidien, est une base e_1, \dots, e_n de E formée de vecteurs de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Une base e_1, \dots, e_n est orthonormale si et seulement si quels que soient i, j dans $\{1, \dots, n\}$, on a $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, où le symbole δ_{ij} signifie 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

Théorème 18.2. Soit e_1, \dots, e_n une base orthonormale de E . Pour tout v dans E , on a

$$v = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i$$

et

$$\|v\|^2 = \sum_i \langle v, e_i \rangle^2.$$

Donc si $v = \sum_i a_i e_i$ ($a_i \in \mathbb{R}$), alors $\|v\|^2 = \sum_i a_i^2$.

Démonstration. Ecrivons $v = \sum_j a_j e_j$. Prenons le produit scalaire avec e_i : $\langle v, e_i \rangle = \sum_j a_j \langle e_j, e_i \rangle = a_i$.

De plus $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \sum_j a_j e_j, \sum_j a_j e_j \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{ij} = \sum_i a_i^2$. \square

Corollaire 18.1. Sous les mêmes hypothèses, si $u = \sum_i a_i e_i$, $v = \sum_i b_i e_i$, alors $\langle u, v \rangle = \sum_i a_i b_i$.

Rappelons l'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir [?] Théorème 9.1).

Théorème 18.3. Soit e_1, \dots, e_n une base de E espace euclidien. Il existe une unique base orthonormale v_1, \dots, v_n de E telle que : $\forall j = 1, \dots, n$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$ et que $\langle e_j, v_j \rangle > 0$.

Ce théorème implique en particulier que tout espace euclidien possède au moins une base orthonormale.

18.3 Projections orthogonales

Définition 18.2. Si E est un espace euclidien et X un sous-ensemble, on note X^\perp l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs dans X . On l'appelle l'orthogonal de X .

L'orthogonal de X un sous-espace de V (exercice 18.4).

Théorème 18.4. Soit V un sous-espace de l'espace euclidien E . Alors E est somme directe de V et V^\perp .

Démonstration. Soit v_1, \dots, v_k une base orthonormale de V . Alors un vecteur e dans E est dans V^\perp si et seulement s'il est orthogonal à chaque v_i (exercice 18.5).

Soit e un vecteur quelconque et posons $v = \sum_i \langle e, v_i \rangle v_i \in V$. On a alors $\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_i \langle e, v_i \rangle v_i, v_j \rangle = \sum_i \langle e, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i \langle e, v_i \rangle \delta_{ij} = \langle e, v_j \rangle$. Alors $\langle e - v, v_j \rangle = \langle e, v_j \rangle - \langle v, v_j \rangle = \langle e, v_j \rangle - \langle e, v_j \rangle = 0$. Donc $e - v \in V^\perp$. Comme $e = e - v + v$, on obtient que $E = V^\perp + V$. Le fait que $V \cap V^\perp = 0$ découle de ce que $\langle v, v \rangle = 0$ seulement si $v = 0$. \square

On appelle *projection orthogonale* de E sur son sous-espace V la projection p de E dans lui-même qui correspond à la somme directe $E = V \oplus V^\perp$. Autrement dit, si $e = v + w$, $v \in V, w \in V^\perp$, elle envoie e sur v . On a, d'après la preuve ci-dessus,

$$p(v) = \sum_i \langle e, v_i \rangle v_i,$$

si v_1, \dots, v_k est une base orthonormale de V . La projection p est une application linéaire.

Exercice 18.4. Montrer que X^\perp est l'intersection de tous les x^\perp , $x \in X$ (on note x^\perp pour $\{x\}^\perp$). Montrer que X^\perp est un sous-espace, et aussi X^\perp .

Exercice 18.5. Si X engendre V , montrer que $X^\perp = V^\perp$.

18.4 Isométries

Définition 18.3. Un endomorphisme u d'un espace euclidien est dit orthogonal si pour tous $x, y \in E$, on a $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Autrement dit, u préserve le produit scalaire.

Théorème 18.5. Les conditions suivantes sont équivalentes, pour un endomorphisme u d'un espace euclidien.

- (i) u est orthogonal ;
- (ii) u est une isométrie, c'est-à-dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout vecteur x .
- (iii) il existe une base orthonormale transformée par u en une base orthonormale ;
- (iv) u transforme toute base orthonormale en une base orthonormale ;
- (v) il existe une base orthonormale où la matrice M de u est orthogonale, c'est-à-dire M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$;
- (vi) la matrice de u dans toute base orthonormale est orthogonale.

Démonstration. (i) implique (iv) ; en effet l'orthonormalité d'une base se vérifie par le produit scalaire.

(iv) implique (iii) : évident.

(iii) implique (ii) : découle du théorème 18.2.

(ii) implique (i) : on utilise la relation de polarisation (3) : $2\langle f(x), f(y) \rangle = \|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 = \|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x, y \rangle$.

(i) implique (vi) : soit e_1, \dots, e_n une base orthonormale et $M = (m_{ij})$. On a donc $u(e_j) = \sum_i m_{ij}e_i$. On a $\langle u(e_j), u(e_k) \rangle = \langle \sum_i m_{ij}e_i, \sum_{i'} m_{i'k}e_{i'} \rangle = \sum_{i,i'} m_{ij}m_{i'k} \langle e_i, e_{i'} \rangle = \sum_i m_{ij}m_{ik}$. Cette dernière somme est le coefficient jk du produit tMM .

Si u est orthogonal, on a $\langle u(e_j), u(e_k) \rangle = \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ et on déduit du calcul précédent que ${}^tMM = I_n$. Par suite tM est l'inverse de M .

(vi) implique (v) : évident.

(v) implique (iii) : même calcul que dans l'implication (i) implique (vi). □

Corollaire 18.2. *Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.*

Exercice 18.6. *Quel est le déterminant d'une matrice orthogonale ?*

Exercice 18.7. *Montrer que si σ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, alors la matrice M définie par $m_{ij} = 1$ si $i = \sigma(j)$ et $= 0$ sinon, est une matrice orthogonale.*

Exercice 18.8. *Montrer que la composée de deux isométries est une isométrie, et de même que l'inverse d'une isométrie.*

Exercice 18.9. *Montrer qu'une matrice orthogonale d'ordre 2 est de la forme $\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix}$. Vérifier aussi directement que ces matrices sont bien orthogonales. Indications : écrire que la matrice multipliée par sa transposée est égale à l'identité ; si $a^2 + b^2 = 0$, il*

existe t tel que $a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$; si de plus $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$, alors $(c, d) = \pm(-b, a)$.

19 Espaces hermitiens

Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Une forme *sequilinéaire* sur V est une application $S : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, quelque que soient les vecteurs u, v et le scalaire a , on ait

$$\begin{aligned} S(u + v, w) &= S(u, w) + S(v, w) \\ S(u, v + w) &= S(u, v) + S(u, w) \\ S(au, v) &= aS(u, v) \\ S(u, av) &= \bar{a}S(u, v), \end{aligned}$$

où \bar{a} est le conjugué du nombre complexe a . On voit donc que la seule différence avec la notion de forme bilinéaire est la dernière équation.

Un exemple : $V = \mathbb{C}^n$, $S((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_i x_i \bar{y}_i$.

Une *forme hermitienne* sur V est une forme sequilinéaire S qui satisfait de plus la condition

$$S(v, u) = \overline{S(u, v)}$$

pour tous les vecteurs u, v . Une conséquence de cette condition est que

$$S(v, v) \in \mathbb{R}$$

pour tout vecteur v : en effet un nombre complexe égal à son conjugué est un nombre réel.

Dans l'exemple précédent, S est hermitien, car $S((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_i y_i \bar{x}_i = \overline{\sum_i \bar{y}_i x_i}$ (car la conjugaison complexe est une involution qui préserve la somme et le produit) $= \overline{S((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))}$.

Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel complexe est une forme hermitienne, qu'on note $\langle u, v \rangle$ plutôt que $S(u, v)$, telle que

$$\langle v, v \rangle \geq 0$$

pour tout vecteur v , avec de plus

$$\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Un *espace hermitien* est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} muni d'un produit scalaire. Ces espaces ont de nombreux points communs avec les espaces euclidiens.

Dans la suite V est un espace hermitien. La *norme* d'un vecteur v est $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Deux vecteurs u, v sont dits orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$; notez que l'orthogonalité est une notion symétrique, car $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, u \rangle = 0$.

Le théorème de Pythagore est toujours vrai : si u, v sont orthogonaux, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

De même, l'inégalité de Cauchy-Schwartz : Pour tous vecteurs x, y , on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité si et seulement si x, y sont colinéaires. La notation $|z|$ désigne le module du nombre complexe z .

20 Formes quadratiques

20.1 Matrice d'une forme bilinéaire

Définition 20.1. La matrice d'une forme bilinéaire B dans une base e_1, \dots, e_n de E est la matrice $(B(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 20.1. Soient M la matrice d'une forme bilinéaire dans une base de E et soit u, v les vecteurs colonnes associés à deux vecteurs de x, y de E . Alors

$$B(x, y) = {}^t u M v.$$

Démonstration. Soit e_1, \dots, e_n la base considérée. Ecrivons $u = {}^t(u_1, \dots, u_n)$ et $v = {}^t(v_1, \dots, v_n)$. Alors $B(x, y) = B(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j) = \sum_{ij} u_i B(e_i, e_j) v_j$, qui est bien égal à ${}^t u M v$. \square

Le rang d'une forme bilinéaire est par définition le rang de sa matrice. Ceci est bien défini, car on a la

Proposition 20.2. Si M, M' sont les matrices de la forme bilinéaire B dans deux bases, alors il existe une matrice P inversible telle que $M = {}^t P M' P$.

Démonstration. Soient $U = (u_1, \dots, u_n)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$ les deux bases. Soient $M_u = (B(u_i, u_j))$ et $M_v = (B(v_i, v_j))$ les matrices de la forme dans ces deux bases respectivement. On considère la matrice de changement de base $P = P_{UV} = (b_{ij})$. On a donc $v_j = \sum_i b_{ij} u_i$. On a alors $B(v_r, v_s) = B(\sum_i b_{ir} u_i, \sum_j b_{js} u_j) = \sum_{ij} b_{ir} b_{js} B(u_i, u_j) = \sum_{ij} b_{ir} B(u_i, u_j) b_{js}$: c'est le coefficient rs dans le produit matriciel ${}^t P M_u P$. Donc $M_v = {}^t P M_u P$. \square

Exercice 20.1. Montrer que la relation qui relie deux matrices carrées M, M' d'ordre n , s'il existe P inversible telle que $M = {}^t P M' P$, est une relation d'équivalence.

20.2 Formes bilinéaires symétriques et forme quadratiques

Une forme bilinéaire B est dite *symétrique* si pour tous vecteurs x, y , on a $B(x, y) = B(y, x)$. Une *forme quadratique* est une fonction sur un espace vectoriel E de la forme $x \mapsto B(x, x)$, où B est une forme bilinéaire sur E .

Théorème 20.1. *Il y a une bijection naturelle entre formes bilinéaires symétriques et forme quadratiques sur E . A une forme bilinéaire symétrique B est associée la forme quadratique $Q(x) = B(x, x)$. A la forme quadratique Q est associée la forme bilinéaire symétrique*

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Cette dernière équation s'appelle *relation de polarisation*.

Notez que dans ce théorème, on suppose que 2 (c'est-à-dire $1 + 1$) n'est pas égal à 0 dans le corps \mathbb{K} : ceci est bien sûr vrai pour les corps usuels $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, mais ce n'est pas vrai dans le corps \mathbb{F}_2 , où l'on a $1 + 1 = 0$. On dit alors que la *caractéristique* de \mathbb{K} est différente de 2.

Démonstration. Soit B une forme bilinéaire symétrique et $Q = B(x, x)$ la forme quadratique associée. Alors $\frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)) = \frac{1}{2}(B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y)) = \frac{1}{2}(B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) - B(x, x) - B(y, y)) = B(x, y)$.

Réciproquement soit Q une forme quadratique, donc $Q = H(x, x)$ pour une forme bilinéaire H . Alors posons $B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$; on a alors $B(x, y) = \frac{1}{2}(H(x + y, x + y) - H(x, x) - H(y, y)) = \frac{1}{2}(H(x, y) + H(y, x))$ (par un calcul semblable au calcul précédent); donc B est une forme bilinéaire symétrique. De plus, on a $B(x, x) = \frac{1}{2}(2H(x, x)) = Q(x)$. \square

Exercice 20.2. *Montrer qu'une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base (resp. dans toute base) est symétrique.*

Exercice 20.3. *Sur l'espace des matrices carrées d'ordre 2, on considère la fonction $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$. Montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique, calculer sa matrice dans la base canonique, préalablement ordonnée, et calculer la forme quadratique associée.*

Exercice 20.4. *Soit B une forme bilinéaire symétrique et $Q(x) = B(x, x)$ la forme quadratique associée. Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs deux à deux orthogonaux pour B (c'est-à-dire $B(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$). Montrer que $Q(v_1 + \dots + v_n) = Q(v_1)^2 + \dots + Q(v_n)^2$.*

Exercice 20.5. Montrer que Q est une forme quadratique, si et seulement si :

1. Pour tout vecteur x et tout scalaire a , on a $Q(ax) = a^2Q(x)$;
2. La fonction $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ est une forme bilinéaire symétrique.

Exercice 20.6. Soit E un espace vectoriel avec base e_1, \dots, e_n , et soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, $k \leq n$. On considère la forme quadratique définie par $Q(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = a_1x_1^2 + \dots + a_kx_k^2$. Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée, ainsi que sa matrice dans la base donnée.

Exercice 20.7. Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique B est $\{x \in E, \forall y \in E, B(x, y) = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace de E dont la dimension est égale au rang de la matrice de B dans une base.

Exercice 20.8. Montrer que le noyau de la forme bilinéaire symétrique de l'exercice 20.6 est $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

20.3 Orthogonalisation

Théorème 20.2. Toute forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel V admet une base orthogonale.

Ici, nous appelons orthogonaux deux vecteurs u, v tels que $B(u, v) = 0$. Une *base orthogonale* est une base telle que ses vecteurs soient deux à deux orthogonaux.

Il est clair qu'une base est orthogonale si et seulement si la matrice dans cette base de la forme est diagonale.

Démonstration. On peut supposer B non nulle. Alors la forme quadratique associée est non nulle. Choisissons un vecteur e_1 tel que $B(e_1, e_1) \neq 0$. Soit $H = \{v \in V, B(e_1, v) = 0\}$. Alors H est un sous-espace de V . Soit $v \in V$, et soit $a = B(v, e_1)$ et $u = v - aB(e_1, e_1)^{-1}e_1$. Alors $B(u, e_1) = B(v, e_1) - B(aB(e_1, e_1)^{-1}e_1, e_1) = a - aB(e_1, e_1)^{-1}B(e_1, e_1) = 0$. Donc $u \in H$. Comme $v = u + aB(e_1, e_1)^{-1}e_1$, on a $V = H + \text{Vect}(e_1)$. La somme est directe, car $e_1 \notin H$, sinon on aurait $B(e_1, e_1) = 0$.

La restriction de B à H est une forme bilinéaire symétrique de H . Par hypothèse de récurrence sur la dimension, il existe une base orthogonale e_1, \dots, e_n de H . Alors e_1, \dots, e_n est une base orthogonale de V pour B . \square

20.4 Polynôme associé à une forme quadratique et une base

On suppose dans toute la suite de ce chapitre que la caractéristique de \mathbb{K} est $\neq 2$.

Rappelons qu'une forme linéaire sur un \mathbb{K} -espace vectoriel est une application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$. Si e_1, \dots, e_n est une base de E , il existe des a_i (à savoir $a_i = \varphi(e_i)$) tels que pour tout $e = \sum_i x_i e_i$, on a $\varphi(e) = \sum_i a_i x_i$. Donc, une forme linéaire n'est rien d'autre qu'un polynôme homogène de degré 1 en plusieurs variables x_1, \dots, x_n , une fois qu'on a choisi une base. Les a_i dépendront de cette base.

Pour les formes quadratiques, on a un résultat analogue.

Proposition 20.3. *Etant donnée une forme quadratique Q sur E et une base e_1, \dots, e_n de E , posons $a_i = Q(e_i)$ et $b_{ij} = B(e_i, e_j)$, où B est la forme bilinéaire symétrique associée à Q . Alors, pour tout $e = \sum_i x_i e_i \in E$,*

$$Q(e) = \sum_i a_i x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j.$$

Réciproquement, si on a cette formule, alors $a_i = Q(e_i)$ et $b_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Nous appellerons *forme polynomiale* de Q et d'une base le polynôme de la proposition.

Démonstration. On a $Q(e) = B(e, e) = B(\sum_i x_i e_i, \sum_i x_i e_i) = \sum_{i,j} B(e_i, e_j) x_i x_j$ (par bilinéarité) $= \sum_i B(e_i, e_i) x_i^2 + \sum_{i \neq j} B(e_i, e_j) x_i x_j$. Cette dernière somme est par symétrie de B égale à $2 \sum_{i < j} B(e_i, e_j) x_i x_j$, et la preuve est finie.

Réciproquement, si on a la formule, alors en utilisant la relation $B(e, f) = \frac{1}{2}(Q(e+f) - Q(e) - Q(f))$, on trouve que $B(e_i, e_i) = a_i$, puisque $Q(e_i) = a_i$ (car pour $e = e_i$, on a $x_j = \delta_{ij}$); de plus, si $i < j$, alors $B(e_i, e_j) = b_{ij}$ (car si $e = e_i + e_j$, on a $x_i = x_j = 1$ et $x_k = 0$ pour les autres k , donc $Q(e) = a_i + a_j + 2b_{ij}$). \square

20.5 Equivalence des formes quadratiques

Deux formes quadratiques Q, Q' (resp. bilinéaires symétriques B, B') sur E sont dites *équivalentes* s'il existe un automorphisme u de E tel que pour tout vecteur x , on a $Q'(x) = Q(u(x))$ (resp. $B'(x, y) = B(u(x), u(y))$) pour tous vecteurs x, y .

Proposition 20.4. Soient B, B' des formes bilinéaires symétriques et Q, Q' les formes quadratiques associées respectives. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) B, B' sont équivalentes ;
- (ii) Q, Q' sont équivalentes ;
- (iii) dans des bases appropriées, B et B' ont la même matrice ;
- (iv) dans les bases appropriées, Q et Q' ont la même forme polynomiale.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) résulte des formules dans le théorème 20.1.

(i) implique (iii) : Si B, B' sont équivalentes, alors $B'(x, y) = B(u(x), u(y))$ pour un automorphisme u de E ; soit e_1, \dots, e_n une base de E . Donc $u(e_1), \dots, u(e_n)$ est une base de E ; on a $B'(e_i, e_j) = B(u(e_i), u(e_j))$, donc la matrice de B' dans la première base est égale à la matrice de B dans la deuxième base.

(iii) implique (iv) : découle de la proposition 20.3.

(iv) implique (ii) : par hypothèse, il existe une base e_1, \dots, e_n et une base e'_1, \dots, e'_n telles que la forme polynomiale de Q' dans la première base est égale à la forme polynomiale de Q dans la deuxième. Soit u l'automorphisme de E qui envoie e_i sur e'_i . On a alors pour tout vecteur $e = \sum_i x_i e_i$: $Q'(e) = Q(\sum_i x_i e'_i)$, par l'hypothèse sur les formes polynomiales. Comme $u(e) = \sum_i x_i e'_i$, on obtient $Q'(e) = Q(u(e))$. □

Soit \mathcal{B} (resp. \mathcal{Q}) l'ensemble des formes bilinéaires symétriques (resp. des formes quadratiques) sur l'espace vectoriel E . Le groupe $Aut(E)$ des automorphismes de E agit à droite sur \mathcal{B} (resp. \mathcal{Q}), par la formule $(B.u)(e, f) = B(u(e), u(f))$ (resp. $(Q.u)(e) = Q(u(e))$). On laisse au lecteur le soin de vérifier que $B.u$ (resp. $Q.u$) ainsi défini est bien une forme bilinéaire symétrique (resp. une forme quadratique), et que l'action est bien une action à droite (voir l'exercice 20.9). Il est clair alors que Q, Q' sont équivalentes si et seulement si elles ont dans la même orbite sous le groupe ; de même pour les formes bilinéaires symétriques.

Par ailleurs, les deux actions sont compatibles avec la bijection entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques : si Q, Q' correspondent respectivement à B, B' et si $u \in Aut(E)$, alors : $Q' = Q.u \Leftrightarrow B' = B.u$, comme le lecteur peut le vérifier par les formules dans le théorème 20.1.

Il découle des propriétés des actions de groupes que l'équivalence des formes quadratiques, et des formes bilinéaires symétriques, est bien une relation d'équivalence.

Exercice 20.9. On suppose qu'un groupe A agit à gauche sur un ensemble E . Soit K un ensemble. On considère l'ensemble \mathcal{F} des fonctions de A dans K . Pour une telle fonction, soit q , et pour a dans A , on définit la fonction $q.a : E \rightarrow K$ par $(q.a)(e) = q(a.e)$. Montrer qu'on définit ainsi une action à droite de A sur \mathcal{F} .

20.6 Formes bilinéaires symétriques : classification sur \mathbb{C} et \mathbb{R}

Théorème 20.3. Toute forme quadratique sur \mathbb{C} est équivalente à une forme quadratique de la forme $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2$, où r est le rang de cette forme. Deux forme quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Théorème 20.4. Toute forme quadratique sur \mathbb{R} est équivalente à une forme quadratique de la forme $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$, où le couple (s, t) est unique. De plus $s+t$ est le rang de cette forme. Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.

On appelle (s, t) la signature de la forme quadratique. Elle est dite *définie positive* si sa signature est $(n, 0)$, où n est la dimension de l'espace.

Preuve du théorème 20.3. 1. Supposons que la forme bilinéaire symétrique associée est B soit de rang r . Il existe une base orthogonale e_1, \dots, e_n pour B . La matrice de B dans cette base est la matrice diagonale dont les éléments sont les $B(e_i, e_i)$. Le rang de cette matrice est le nombre de e_i non nuls. Quitte à réordonner la base, on peut supposer que $B(e_i, e_i) = 0$ pour $r > i$. Pour $i = 1, \dots, r$, le nombre complexe $B(e_i, e_i)$ est non nul et nous choisissons une racine carrée de ce nombre, et notons z_i son inverse. Remplaçons e_i par $z_i e_i$. Alors $B(e_i, e_i) = 1$. Il s'ensuit par la proposition 20.3 que la forme quadratique est celle de l'énoncé.

2. Découle de la première partie, car dans deux bases appropriées les deux formes ont la même matrice. \square

Preuve du théorème 20.4. 1. Il existe une base orthogonale e_1, \dots, e_n pour B . La matrice de B dans cette base est la matrice diagonale dont les éléments sont les $B(e_i, e_i)$. Le rang de cette matrice est le nombre de e_i non nuls. Quitte à réordonner la base, on peut supposer que $B(e_i, e_i) = 0$ pour $r > i$. De plus, on peut supposer $B(e_i, e_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, s$ et $B(e_i, e_i) < 0$ pour $i = s+1, \dots, r$, et on pose $t = r - s$. Nous définissons le réel a_i comme l'inverse de la racine carrée de $B(e_i, e_i)$ si $i = 1, \dots, r$, et comme l'inverse de

la racine carrée de $-B(e_i, e_i)$ si $i = r + 1, \dots, r$. Nous remplaçons e_i par $a_i e_i$ pour tous ces i . Alors $B(e_i, e_i) = 1$ dans le premier cas, et $B(e_i, e_i) = -1$ dans le deuxième. Dans cette base, la forme est celle de l'énoncé.

2. Unicité de s, t . Nous supposons que la forme quadratique Q a, dans la base e_1, \dots, e_n , la forme polynomiale donnée dans le théorème. Le rang r de Q est entièrement déterminé par Q .

Notons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ et $G = \text{Vect}(e_{s+1}, \dots, e_r)$. La restriction de Q à F est $x_1^2 + \dots + x_s^2$ et à G , c'est $-(x_{s+1}^2 + \dots + x_r^2)$. La première est donc définie positive, et la seconde est définie négative. Soit H , un sous-espace de $F + G$, tel que la restriction de Q à H soit définie positive. Alors $H \cap G = 0$. Donc la somme $H + G$ est directe et par suite $\dim(H) + \dim(G) \leq \dim(F + G) = r$. Donc $\dim(H) \leq r - \dim(G) \leq s + t - t = s$. Il s'ensuit que s est le maximum des dimensions des sous-espaces de $F + G$ auxquels la restriction de Q est définie positive. Cela détermine s de manière unique. C'est analogue pour t .

3. Si deux formes ont même signature, il existe deux bases où elles ont la même forme polynomiale. Elles sont donc équivalentes. \square

Exercice 20.10. Soient Q_1, Q_2 des formes quadratiques sur les espaces réels E_1, E_2 , de signatures $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$. Soit $Q; E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{K}$, $Q(x_1, x_2) = Q_1(x_1) + Q_2(x_2)$. Montrer que Q est une forme quadratique de signature $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$.

Exercice 20.11. Montrer que le nombre de classes d'équivalence de formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, sur le corps \mathbb{C} et sur le corps \mathbb{R} , est fini.

20.7 Algorithme de Gauss*

Théorème 20.5. On suppose que $2 \neq 0$ dans \mathbb{K} . Toute forme quadratique peut s'écrire comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

Cette décomposition n'est pas unique; et par conséquent, l'algorithme ci-dessous n'est pas *déterministe*; il y a des choix en cours de route.

Ce théorème est une conséquence du théorème 20.2. Réciproquement, l'algorithme de Gauss permet de déterminer le rang et la signature d'une forme quadratique réelle.

Pour prouver le théorème, nous décrivons cet algorithme : partant d'une forme quadratique donnée sous la forme d'un polynôme homogène de degré

2 (voir la proposition 20.3), il donne sa décomposition en somme de combinaisons linéaires de carrés polynômes homogènes de degré 1 linéairement indépendants.

Une partie de l'algorithme repose sur la *complétion du carré*. Faisons quelques exemples.

Exemple 20.1. *La complétion du carré classique consiste à transformer la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ comme suit (on suppose le coefficient a non nul) :*

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2}y^2 + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2. \end{aligned}$$

On a donc écrit la forme quadratique de départ comme combinaison linéaire des carrés des formes linéaires $x + \frac{b}{2a}y$ et y , lesquelles sont bien linéairement indépendantes, car $a \neq 0$.

Exemple 20.2. *On veut écrire la forme quadratique xy comme somme de deux carrés de formes linéaires. On s'appuie sur le fait que $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 4xy$. Donc*

$$xy = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2.$$

Revenons à l'algorithme de Gauss. Soit donc $Q(x_1, \dots, x_n)$ comme dans la proposition 20.3. Nous commençons par supposer que Q contienne un terme x_i^2 avec coefficient non nul. On peut supposer $i = n$. On va faire la complétion du carré avec x_n . On peut écrire $Q = a_n x_n^2 + f(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + Q'(x_1, \dots, x_{n-1})$, où f' est une forme linéaire et Q' une forme quadratique, ne comportant pas la variable x_n . Alors

$$Q = a_n\left(x_n + \frac{1}{2a_n}f\right)^2 - \frac{1}{4a_n}f^2 + Q'.$$

On conclut par récurrence sur le nombre de variables, appliquée à la forme quadratique $Q' - \frac{1}{4a_1}f^2$, laquelle est une forme quadratique en x_1, \dots, x_{n-1} . On obtient que cette dernière est une combinaison linéaire des carrés de formes quadratiques f_1, \dots, f_k en x_1, \dots, x_{n-1} linéairement indépendantes. Alors les formes linéaires $f_1, \dots, f_k, x_n + \frac{1}{2a_1}f$ sont linéairement indépendantes (car seule la dernière comporte x_n), et Q est combinaison linéaire de leurs carrés.

On suppose maintenant qu'aucun monôme x_i^2 n'apparaisse dans Q . On a alors

$$Q = ax_1x_2 + x_1f_1(x_3, \dots, x_n) + x_2f_2(x_3, \dots, x_n) + R(x_3, \dots, x_n),$$

où $a \neq 0$, et où f_1, f_2 sont des formes linéaires et R une forme quadratique. On a

$$\begin{aligned} Q &= a(x_1 + \frac{1}{a}f_2)(x_2 + \frac{1}{a}f_1) + R - \frac{1}{a}f_1f_2 \\ &= \frac{a}{4}[(x_1 + \frac{1}{a}f_2 + x_2 + \frac{1}{a}f_1)^2 - (x_1 + \frac{1}{a}f_2 - x_2 - \frac{1}{a}f_1)^2] + Q'(x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

On conclut alors par récurrence sur n , en utilisant le lemme suivant (appliqué à $g_1 = \frac{1}{a}f_1 + \frac{1}{a}f_2, g_2 = -\frac{1}{a}f_1 + \frac{1}{a}f_2$, et où Q' est par récurrence une combinaison linéaire des carrés de g_3, \dots, g_p , formes linéaires en x_3, \dots, x_p , linéairement indépendantes).

Lemme 20.1. *Soient g_1, \dots, g_p des formes linéaires en x_3, \dots, x_n , telles que g_3, \dots, g_p sont linéairement indépendantes. Alors les formes linéaires $x_1 + x_2 + g_1, x_1 - x_2 + g_2, g_3, \dots, g_p$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. □

20.8 Applications de l'algorithme de Gauss*

1. L'algorithme de Gauss permet d'orthogonaliser une forme quadratique (ce que nous savons déjà par le théorème 20.2, dont la preuve fournit aussi un algorithme). En effet, soit $Q(x_1, \dots, x_n)$ donnée par sa forme polynomiale dans une certaine base e_1, \dots, e_n . L'algorithme permet de l'écrire comme une combinaison linéaire $\sum_i a_i \phi_i(x_1, \dots, x_n)^2$ de carrés de forme linéaires.

Conformément à la Proposition 20.3, la variable x_i représente la forme linéaire “ i -ème coordonnée dans la base précédente” ; autrement dit, c'est la fonction, notée e_i^* , qui est définie par $e_i^*(\sum_{1 \leq j \leq n} b_j e_j) = b_i$ (les b_j sont les coordonnées du vecteur dans la parenthèse).

Donc chaque forme linéaire ϕ_k est combinaison linéaire des fonctions e_i^* (qui sont aussi des formes linéaires). On applique alors un théorème qu'on verra dans un cours sur la dualité (voir [2]) : il existe une base f_1, \dots, f_n de l'espace telle que $f_i^* = \phi_i$ pour tout i . Il s'ensuit que dans cette nouvelle base, la forme quadratique a la forme polynomiale $\sum_i a_i x_i^2$. D'après la dernière assertion de la proposition 20.3, la matrice dans cette base de la forme biliassociée est diagonale, donc cette base est orthogonale.

2. L'algorithme de Gauss permet le calcul de la signature d'une forme quadratique réelle. La signature est (s, t) , où s (resp. t) est le nombre de

coefficients positifs (resp. négatifs) dans l'expression de la forme comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

Exercice 20.12. Sur \mathbb{R}^{2n} , on définit $Q(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) = \sum_i x_i y_i$. Montrer que Q est une forme quadratique et déterminer sa signature.

Exercice 20.13. Trouver un exemple de forme quadratique qui a deux expressions distinctes comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

Exercice 20.14. Appliquer la méthode de l'exemple 20.1 au formes $x^2 + xy + y^2$ et $x^2 + xy - y^2$, et dire laquelle est définie positive. Plus généralement, dans cet exemple, à quelle condition la forme quadratique est-elle définie positive ?

Exercice 20.15. Appliquer la réduction de Gauss aux formes quadratiques suivantes :

- a) $xy + yz + zx$;
- b) $xy + yz + zt + tx$;
- c) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$;
- d) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$;
- e) $(x + y)^2 - x^2 - y^2$.

Exercice 20.16. Calculer la signature de la forme quadratique réelle de l'exercice 20.3.

Exercice 20.17. Calculer la signature de la forme quadratique réelle $\text{Tr}({}^tMM)$ sur l'espace des matrices carrées réelles d'ordre n .

Exercice 20.18. Calculer la signature des forme quadratiques réelles suivantes :

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + xz + yz)$;
- b) $x^2 - 2yz - xz$;
- c) $x^2 + 2xy + y^2$;
- d) $x^2 + xy + y^2$;
- e) $ax^2 + bxy + cy^2$.

Exercice 20.19. Soit $Q(M) = -4\det(M) + \text{Tr}(M)^2$ la forme quadratique réelle sur l'espace des matrices carrées d'ordre 2. Déterminer sa signature.

Exercice 20.20. (pièges !) Déterminer la signature des deux formes quadratiques réelles $(x - y)^2 - (y - x)^2$ et $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$.

21 Formes multilinéaires alternées et déterminants

Définition 21.1. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . On appelle forme n -linéaire une application $f : E^n \mapsto \mathbb{K}$ qui est n -linéaire, c'est-à-dire : quel que soit $i = 1, \dots, n$, et quels que soient $v_j, j \in \{1, \dots, n\} \setminus i$, la fonction $E \rightarrow, v \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$ est linéaire.

Nous connaissons déjà les cas particuliers où $n = 1$ ou $n = 2$.

Définition 21.2. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Une application n -linéaire $f : E^n \mapsto \mathbb{K}$ est dite alternée si quels que soient $v_i, i \in \{1, \dots, n\}$, tels que $v_j = v_k$ pour deux indices distincts j, k , on a $f(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Théorème 21.1. Soit $E = \mathbb{K}^n$. La fonction de E^n dans \mathbb{K} , qui à n vecteurs v_1, \dots, v_n associe le déterminant de la matrice dont la j -ème colonne est v_j , est n -linéaire alternée.

Démonstration. Si on fixe les colonnes d'une matrice, sauf la j -ème, et si on fait varier la j -ème colonne, on obtient, en prenant le déterminant, une application linéaire de \mathbb{K}^n (vu comme des vecteurs colonnes) dans K (voir [?]).

De plus, le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales, est égal à 0. Ceci prouve le théorème. \square

Appelons *permutation* de $\{1, \dots, n\}$ une bijection de cet ensemble dans lui-même. On appelle *matrice de la permutation* σ la matrice P_σ dont l'élément i, j est 1 si $\sigma(j) = i$, et 0 sinon.

Par exemple, la matrice de la permutation $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 4$ est la matrice $P_{2314} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La signature d'une permutation est par définition le nombre $\text{sgn}(\sigma) = \det(P_\sigma)$.

Théorème 21.2. Le déterminant d'une matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})$ est égal à

$$\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

où la somme est sur toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Soient v_1, \dots, v_n les colonnes de la matrice. Son déterminant est une forme n -linéaire alternée des colonnes, que nous notons $f(v_1, \dots, v_n)$. Nous utilisons la base canonique e_1, \dots, e_n de \mathbb{K}^n (vecteurs colonnes). On a donc $\det(A) = f(v_1, \dots, v_n) = f(\sum_i a_{i1}e_i, \dots, \sum_j a_{jn}e_j)$. Par la n -linéarité de f , ceci est égal à (prendre une bonne respiration) $\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$. Mais pour que $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ soit non nul, il faut que i_1, \dots, i_n soient distincts; autrement dit, la fonction $1 \mapsto i_1, \dots, n \mapsto i_n$ est une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$; et dans ce cas on $i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$.

Par ailleurs, $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ est alors égal au déterminant de la matrice dont les colonnes sont, dans cet ordre, les vecteurs e_{i_1}, \dots, e_{i_n} ; cette matrice n'est autre que la matrice de permutation P_σ , et par suite son déterminant est $\det(P_\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$. D'où la formule. \square

Exercice 21.1. * On rappelle que le déterminant d'une matrice est multiplié par -1 quand on échange deux colonnes. Montrer que le signe d'une permutation est ± 1 , et plus précisément, $(-1)^k$, où k est le nombre d'échange de colonnes appliquée à la matrice de cette permutation pour la transformer en la matrice identité.

Exercice 21.2. Combien y a-t-il de termes dans la formule du théorème 21.2 ?

Exercice 21.3. Ecrire la formule du théorème 21.2 pour une matrice carrée d'ordre 2 et 3, et pour les courages, aussi d'ordre 4.

22 Exponentielle d'une matrice réelle ou complexe

Soit M une matrice carrée à coefficients complexes. On appelle *exponentielle* de M , la matrice notée e^M égale à

$$e^M = \sum_{0 \leq n} \frac{1}{n!} M^n, \quad (4)$$

où M^0 est à interpréter comme la matrice identité de la taille appropriée.

Mais comment définit-on cette somme infinie ?

D'abord, soit (v_n) une suite de vecteurs dans \mathbb{C}^d . Ecrivons $v_n = (v_{n1}, \dots, v_{nd})$. On dira que cette suite *converge* si pour chaque coordonnée $i = 1, \dots, d$, la suite des i -èmes composantes v_{ni} converge vers une limite l_i ; alors la *limite* de (v_n) est le vecteur $(l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{C}^d$. Par exemple, pour

$v_n = (1/n, e^{-n}) \in \mathbb{C}^2$, la suite (v_n) converge, car les deux suites $(1/n)$ et e^{-n} convergent vers 0 et 1 respectivement ; donc $v_n = (1/n, e^{-n})$ tend vers $(0, 1)$.

Pour une somme infinie de vecteurs $\sum_n v_n$, le critère est que chaque composante $\sum_n v_{ni}$ converge. On utilisera la condition suffisante suivante : pour que $\sum_n v_n$ converge, il suffit qu'elle converge absolument, c'est-à-dire que les séries numériques $\sum_n |v_{ni}|$ convergent, où $|z|$ est le module du nombre complexe z .

La convergence de la somme infinie (4) se démontre de la manière suivante. Notons z_{nij} le coefficient i, j de la matrice $\frac{1}{n!}M^n$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que pour chaque couple i, j , la somme $\sum |z_{nij}|$ converge.

Notons $|A|$ le maximum des modules des coefficients de la matrice A . Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont des matrices carrées de taille $d \times d$, le coefficient i, k de leur produit est $\sum_j a_{ij}b_{jk}$; donc son module est $\leq \sum_j |a_{ij}b_{jk}| = \sum_j |a_{ij}||b_{jk}| \leq d|A||B|$. Il s'ensuit (récurrence sur n) que $|M^n| \leq d^n|M|^n$. Par conséquent $|z_{nij}| \leq \frac{1}{n!}d^n|M|^n$ et par suite $\sum_n |z_{nij}|$ converge (car elle est majorée par la série convergente $\sum_n \frac{1}{n!}(d|M|)^n = e^{d|M|}$).

Tous ces efforts nous donnent que e^M est bien définie. Calculons-là dans les cas particuliers où M est diagonale, et où M est nilpotente, et puis donnons une méthode générale.

Supposons que M soit une matrice diagonale $M = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$. Alors $e^M = \text{Diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$.

Supposons que M soit une matrice nilpotente, avec $M^r = 0$; alors $e^M = \sum_{0 \leq n < r} \frac{1}{n!}M^n$, qui est une somme finie.

Supposons que M soit conjuguée à une autre matrice : $M = P^{-1}NP$. Alors $e^M = P^{-1}e^N P$; ceci découle de ce que la fonction $N \mapsto P^{-1}NP$ est linéaire, préserve le produit, et qu'elle est continue (j'ometts les détails). Ceci s'applique en particulier au cas où N est diagonale, et où on connaît P ; ce qui permet de calculer M .

Enfin supposons que $M = M_1 + M_2$ où M_1 et M_2 commutent (pour le produit !). On a alors $e^M = e^{M_1}e^{M_2}$ (pas vrai sans la commutation !). Pour le démontrer, on tire avantage de la convergence absolue, qui permet de manipuler les sommes infinies comme si elles étaient des sommes finies : associativité et commutativité. On a en effet $e^M = \sum_n \frac{1}{n!}(M_1 + M_2)^n = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} M_1^i M_2^j$, et c'est ici qu'on utilise la commutation. Donc $e^M = \sum_{i,j} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} M_1^i M_2^j = \sum_i \frac{1}{i!} M_1^i \sum_j \frac{1}{j!} M_2^j = e^{M_1} e^{M_2}$.

Tout ceci fournit une méthode théorique, et aussi pratique, pour calculer l'exponentielle d'une matrice M : on écrit $M = M_1 + M_2$ où ces deux matrices commutent, où M_1 est diagonalisable et où M_2 est nilpotente. Donc

$M_1 = P^{-1}DP$, D matrice diagonale, M_2 nilpotente. Et on applique ce qui précède : $e^M = e^{M_1}e^{M_2}$.

Exemple 22.1. Prenons $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $M = I_2 + N$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nilpotente, de carré nul; de plus I_2 et M commutent. On a $e^{I_2} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = eI_2$, $e^N = \sum_{0 \leq n} \frac{1}{n!} N^n = I_2 + N = M$ et enfin $e^M = eI_2 M = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix}$.

Exercice 22.1. Calculer les puissances de A , et puis directement l'exponentielle de la matrice tA , avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, en tirant avantage des formules $\sin(t) = t - t^3/6 + t^5/5! - \dots$, $\cos(t) = 1 - t^2/2 + t^4/4! - \dots$.

Exercice 22.2. 1. Montrer que e^{-M} est l'inverse de e^M . 2. Montrer que pour $k \in \mathbb{Z}$, $e^{kM} = (e^M)^k$.

23 Solutionnaire des exercices

10.3

12.1

12.2 D'après l'exercice mentionné, l'espace est somme directe du noyau de $\text{Ker}(p - \text{id})$ et de $\text{Ker}(p)$. Or ceux-ci sont des sous-espaces propres. Donc on applique la proposition 12.2.

12.3 Le calcul montre que le polynôme caractéristique est x^3 . Donc l'unique valeur propre est 0. Si l'endomorphisme était diagonalisable, ce serait l'endomorphisme nul.

12.4 Le calcul montre que le polynôme caractéristique est $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Donc les valeurs propres sont distinctes et on applique le théorème 12.1.

12.5 Le noyau de $f - \lambda_i \text{id}$ est $\mathbb{K}v_i$. On a $f(g(v_i)) = g(f)v_i = g(\lambda_i v_i) = \lambda_i g(v_i)$. Donc $g(v_i) \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$. Donc $g(v_i) = \mu_i v_i$ pour un certain scalaire μ_i .

13.1 C'est $(x - 1)(x - 2)$.

13.2 Soit E l'ensemble des éléments diagonaux de la matrice. Le polynôme minimal est alors $\prod_{\lambda \in E} (x - \lambda)$.

13.3 C'est $(x - 2)^2(x - 3)$.

13.4 Si $P(x)$ est un polynôme, alors $P(M)$ est la matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont les matrices $P(M_1), \dots, P(M_k)$. Donc $P(M)$ est nul si et seulement si chaque $P(M_i)$ est nul, ce qui signifie que P est

multiple du polynôme minimal P_i de M_i . Donc P est le plus petit multiple commun de P_1, \dots, P_k .

14.2 Soit (a_{ij}) la matrice de f dans la base v_1, \dots, v_n . On a alors $f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$. Définissons $u_1 = v_n, u_2 = v_{n-1}, \dots, u_n = v_1$ et (b_{ij}) la matrice de f dans la base u_1, \dots, u_n . Alors $\sum_i b_{ij} u_i = f(u_j) = f(v_{n+1-j}) = \sum_i a_{i, n+1-j} v_i = \sum_i a_{i, n+1-j} u_{n+1-i}$. En posant $i' = n + 1 - i$, ceci est égal à $\sum_{i'} a_{n+1-i', n+1-j} u_{i'} = \sum_i a_{n+1-i, n+1-j} u_i$. Donc $b_{ij} = a_{n+1-i, n+1-j}$: les deux matrices s'obtiennent l'une de l'autre par symétrie par rapport à leur centre. On conclut l'exercice, car si l'une est triangulaire supérieure l'autre est triangulaire inférieure.

16.3 On a $g := f^n - \alpha_{n-1} f^{n-1} - \dots - \alpha_1 f - \alpha_0 \text{id} = 0$. En effet $g(v) = 0$. Par conséquent, puis que f et g commutent, f^i et g commutent aussi, donc $g(f^i(v)) = f^i(g(v)) = 0$. Donc $g = 0$ puisque $g(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Donc le polynôme minimal de f divise $x^n - \alpha_{n-1} x^{n-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0$. Les puissances f^k, \dots, f, id sont linéairement indépendantes si $k < n$, car les vecteurs $f^k(v) = e_{k-1}, \dots, f(v) = e_2, v = e_1$ sont linéairement indépendants. Donc le polynôme minimal de f est de degré au moins n . Il s'ensuit que c'est bien $x^n - \alpha_{n-1} x^{n-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0$, et c'est aussi le polynôme caractéristique.

17.3 a) $\{x\}$, dimension 1 ; b) $\{w, x\}$, dimension 2 ; c) $\{v, w, x\}$, dimension 3 ; d) $\{u, v, w, x\}$, dimension 4 ; e) même chose que d).

17.4 La dimension de V est celle du noyau de l'endomorphisme nul, qui est f^2 , donc sa dimension est 11. Le maximum des longueurs de chaînes est 2, car l'index de nilpotence de f est 2. Comme $11 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2$, le type de la base de Jordan est $\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$.

17.5 $\{1, 1, 2, 2, 3, 4\}$. Pour comprendre ceci, on peut disposer des étoiles par colonnes, représentant les dimensions des noyaux : la première colonne pour le noyau de f , les deux premières pour le noyau de f^2 , etc...

```

* * * *
* * *
* *
* *
*
*

```

Les longueurs de lignes sont alors les longueurs des chaînes.

17.6 On peut commencer par l'exemple courant. L'image de f est $\text{Vect}(v_{12}, v_{13}, v_{32})$, c'est-à-dire les buts des flèches du graphe. L'image de f^2 est $\text{Vect}(v_{13})$, car v_{13} est l'unique but d'un chemin de longueur 2 dans le graphe. Quant à l'image de f^3 , elle est nulle. On a $f^3 = 0$.

Avant de faire le cas général, on peut considérer une base de Jordan avec une seule chaîne, de longueur n , donc avec n vecteurs. L'image de f est de dimension $n - 1$, celle de f^2 est de dimension $n - 2$, etc... On a $f^n = 0$.

Cas général : avec les notations de la définition 17.1, l'image de f est $\text{Vect}(v_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 2, \dots, n_i)$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants, donc la dimension de l'image est $\sum_i (n_i - 1)$, autrement dit $n - k$, si on note n la dimension de l'espace ambiant. Du reste, on peut déduire ceci du théorème du rang et du lemme 17.2.

Pour ce qui est de l'image de f^2 , elle est engendrée par les vecteurs v_{ij} avec $j \geq 2$. Sa dimension est donc la somme des $n_{ij} - 2$, où la somme est sur tous les i tels que $n_i \geq 2$.

Plus généralement, la dimension de l'image de f^r est la somme de tous les $n_i - r$, où on fait la somme sur les i tels que $n_i \geq r$.

En particulier, l'image de f^r est nulle dès que r est \geq au maximum des n_i . On a donc $f^r = 0$ si r est égal à ce maximum, et c'est l'exposant de nilpotence de f .

17.7 Il y a une seule chaîne de longueur n ; autrement dit le type est $\{n\}$.

17.8 Il y a une chaîne de longueur $n - 1$ et une chaîne de longueur 1; autrement dit le type est $\{n - 1, 1\}$.

17.9 On $f(c - a) = 0$. Comme $a, b, c - a, d$ est une base de l'espace ambiant, et que de plus $f(a) = b, f(b) = d, f(d) = 0$, on cette dernière base est une base de Jordan, avec graphe : $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow 0, c - a \rightarrow 0$. Son type est $\{3, 1\}$.

17.10 L'exposant de nilpotence est n . On peut le montrer de plusieurs manières. Par exemple, on peut trouver une formule pour M^r , $r = 1, 2, \dots, n$, où interviennent les coefficients binomiaux.

On peut aussi montrer, de manière plus paresseuse, montrer que M^r est une matrice triangulaire inférieure $A = (a_{ij})$, avec $a_{ij} = 0$ pour tous les $j \leq i - r + 1$, alors que les coefficients $a_{i, i-r}$ sont égaux à 1.

Pour la base de Jordan, on peut utiliser l'exercice 17.6. Comme l'exposant de nilpotence est égal à la dimension de l'espace ambiant, la base de Jordan ne peut avoir qu'une seule chaîne; elle donc de type $\{n\}$, et la forme de Jordan de la matrice est un bloc de Jordan nilpotent d'ordre n .

17.11 On a en effet $f(u) = v + w, f(v + w) = w, f(w) = 0$. Le graphe est $u \rightarrow v + w \rightarrow w \rightarrow 0$.

17.12 Les types possibles sont $\{3\}$, $\{1, 2\}$ et $\{1, 1, 1\}$. Les exposants de nilpotence sont respectivement 3, 2 et 1. Pour les 4 matrices indiquées, les exposants de nilpotence sont respectivement 3, 2, 2, 3.

17.13 Les types possibles sont $\{4\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}$, $\{1, 1, 2\}$ et $\{1, 1, 1, 1\}$. Les exposants de nilpotence sont respectivement 4, 3, 2, 2, 1. On ne peut

donc déduire le type de l'exposant de nilpotence.

17.14 Les deux premières matrices ont deux valeurs propres distinctes λ , μ disons, car le discriminant de leur polynôme caractéristique est non nul dans les deux cas. Donc ces matrices sont diagonalisables et on a deux blocs de Jordan d'ordre 1.

La troisième matrice M_3 a la valeur propre 2 à la multiplicité 2. Comme $M_3 \neq 2I_2$, la forme de Jordan est un seul bloc de degré 2.

La quatrième matrice est diagonalisable car elle a les valeurs propres distinctes 1, 2, 3.

La cinquième matrice a trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable, donc les blocs de Jordan sont de taille 1.

La sixième matrice M_6 a la valeur propre 3 avec multiplicité 3; le carré de $M_6 - 3I_3$ n'est pas nul, donc il y a un seul bloc de Jordan d'ordre 3 et de valeur propre 3.

Enfin, la dernière matrice M_7 a la valeur propre 3 avec multiplicité 3; $M_7 \neq I_3$, donc M_7 n'est pas diagonalisable; le carré de $M_7 - 3I_3$ est nul, donc il y a un bloc de Jordan d'ordre 2 et un d'ordre 1, tous les deux associés à la valeur propre 3.

17.15 La forme de Jordan dépend des égalités entre les trois racines a, b, c .

Si elles sont distinctes, la matrice est diagonalisable, et il y a donc 3 blocs de Jordan d'ordre 1.

Si $a = b \neq c$, alors on peut avoir deux polynômes minimaux : le polynôme caractéristique, ou $(x-a)(x-c)$. Dans le premier cas il y a un bloc de Jordan d'ordre 2 (valeur propre a) et un bloc de Jordan d'ordre 1 (valeur propre c). Dans le deuxième cas, la matrice est diagonalisable.

Si $a = b = c$, alors il peut y avoir deux polynômes minimaux : le polynôme caractéristique, $(x-a)^2$ ou $x-a$. Dans le premier cas, il y a un bloc de Jordan d'ordre 3. Dans le deuxième cas, il y a un bloc d'ordre 2 et un d'ordre 1. Dans le troisième cas, la matrice est diagonalisable.

18.1 On a $\langle x/||x||, x/||x|| \rangle = (1/||x||^2)\langle x, x \rangle = (1/||x||^2)||x||^2 = 1$. Donc $||x|| = 1$.

18.2 On vérifie sans peine que c'est une forme bilinéaire. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\langle (a, b), (a, b) \rangle = a^2 + b^2 + ab = (a + 1/2b)^2 + 3/4b^2 \geq 0$, et ça vaut 0 seulement si $(a, b) = 0$.

18.3 On a $\langle ax, ax \rangle = a^2\langle x, x \rangle = a^2||x||^2$. Donc $||ax|| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = |a|||x||$.

On a $||x|| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

L'inégalité est équivalente à l'inégalité obtenue en élevant les deux côtés au carré. On a $||x + y||^2 = \langle x + y, x + y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y \rangle$ (relation de polarisation) et $(||x|| + ||y||)^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| ||y||$. Il s'agit donc

de montrer que $\langle x, y \rangle \geq \|x\| \|y\|$, ce qui découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Enfin, par le calcul précédent, on a l'égalité $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$. Cette dernière égalité est équivalente à $\langle x, y \rangle \geq 0$ et $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$. Par le théorème 18.1, ceci est équivalent à $\langle x, y \rangle \geq 0$ et $x = 0$ ou $y = ax$ ($a \in \mathbb{R}$). Mais $y = ax$ avec $x \neq 0$ et $a < 0$ implique $\langle x, y \rangle < 0$. d'où la conclusion.

18.4 Un vecteur v est dans X^\perp si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur dans X , et ceci est équivalent à $v \in x^\perp$ pour tout x dans X . D'où l'assertion sur l'intersection.

Comme l'intersection de sous-espaces est un sous-espace, il suffit de montrer que x^\perp est un sous-espace pour tout vecteur x . Or la fonction $v \mapsto \langle v, x \rangle$ est une application linéaire de l'espace euclidien vers \mathbb{R} . Son noyau est un sous-espace, et c'est justement x^\perp .

18.5 Soit $u \in V^\perp$. Donc par définition, u est orthogonal à tout v dans V . Par suite il est orthogonal à tout x dans X (car $X \subset V$) et donc $V^\perp \subset X^\perp$.

Réciproquement, soit $u \in X^\perp$, donc orthogonal à tout x dans X . Soit $v \in V$. Alors $v = \sum_x a_x x$, donc $\langle u, v \rangle = \langle u, \sum_x a_x x \rangle = \sum_x a_x \langle u, x \rangle = 0$. Donc $u \in V^\perp$.

D'où : $V^\perp = X^\perp$.

18.6 On a ${}^t M M = I_n$, et $\det(M) = \det({}^t M)$. Donc $\det(M)^2 = 1$, et $\det(M) = \pm 1$.

18.7 On note M_σ la matrice de l'énoncé. On montre que pour deux permutations σ et τ , on a toujours $M_\sigma M_\tau = M_{\sigma \circ \tau}$. Ensuite que $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$ et on en déduit que $M_\sigma^{-1} = {}^t M_\sigma$.

Autre solution : soit l'endomorphisme f dont la matrice dans la base orthonormale e_1, \dots, e_n est M_σ . Alors $f(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Donc $\langle f(e_j), f(e_k) \rangle = \langle e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(k)} \rangle = \delta_{\sigma(j), \sigma(k)} = \delta_{jk}$. Donc la base $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$ est orthonormale et on applique le théorème.

18.8 Une isométrie préserve le produit scalaire. On en déduit facilement l'exercice.

18.9 Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice orthogonale d'ordre 2. On a donc $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ça donne $a^2 + b^2 = 0$, $ac + bd = 0$, $c^2 + d^2 = 1$. La deuxième équation implique que $(c, d) = e(-b, a)$. La première que $a = \cos(t)$, $b = \sin(t)$. La troisième donne alors $1 = e^2$, donc $e = \pm 1$.

20.19 On a $Q(M) = -4(ad - bc) + (a + d)^2 = (a - d)^2 + 4ad - 4ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc = (a - d)^2 + (b + c)^2 - (b - c)^2$. C'est une combinaison linéaire de 3 formes linéaires; comme il y a deux coefficients positifs et un négatif,

la signature est $(2, 1)$.

21.2 $n!$

21.3 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}; a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$. Pas courageux.

22.1 Soit A cette matrice. Alors la suite des puissances de A a une période égale à 4, avec $A^0 = I_2$, $A^1 = A$, $A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$. On en déduit que le coefficient 1, 1 de $\exp(tA)$ est $1 - t^2/2! + t^4/4! - \dots = \cos(t)$. Pour les autres coefficients, un calcul analogue conduit à la conclusion $\exp(tA) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$.

Références

- [1] C. Reutenauer, Notes de cours d'algèbre linéaire 1, UQAM. **3**
- [2] C. Reutenauer, Notes de cours d'algèbre linéaire 3, UQAM. **55**

Index

- δ_{ij} , 43
- n -linéaire, 57
- équivalente, 50

- application linéaire, 7
- arête, 36
- automorphisme, 9

- base adaptée, 14, 30
- base orthogonale, 49
- Bezout, 4
- bilinéaire, 41
- bloc de Jordan, 33, 39

- caractéristique, 48
- chaîne, 33
- chemin, 36
- coefficients, 3
- cofacteur, 11
- colinéaire, 42
- comatrice, 11
- combinaison linéaire, 6
- complétion du carré, 54
- convergence, 58
- corps, 3
- cyclique, 30

- définie positive, 52
- déterministe, 53
- développement de Laplace, 11
- diagonalisable, 23, 24
- dimension, 6
- directe, 13
- divison euclidienne, 4

- endomorphisme, 8
- endomorphisme orthogonal, 44
- espace vectoriel, 4

- espace vectoriel sur \mathbb{R} , 3
- exponentielle, 58
- exposant de nilpotence, 38

- forme n -linéaire, 57
- forme bilinéaire, 41
- forme de Jordan, 39
- forme linéaire, 8

- idempotent, 16
- inégalité de Cauchy-Schwartz, 42, 47
- irréductible, 16
- isomorphisme, 8

- limite, 58
- linéairement dépendants, 6

- matrice adjointe, 11
- matrice compagne, 32
- matrice d'adjacence, 37
- matrice d'une forme bilinéaire, 47
- matrice de permutation, 57
- matrice orthogonale, 45
- mineur, 10
- multi-ensemble, 34
- multiplicité, 4
- mutlilinéaire, 57

- nilpotent, 33
- nombres de Fibonacci, 32
- norme, 42, 47
- noyau, 8

- ordre, 9
- orthogonal, 44, 47
- orthonormale, 43
- orthonormalisation, 43

- permutation, 57

polarisation, 42, 48
polynôme caractéristique, 19, 20
polynôme compagnon, 32
polynôme minimal, 25
produit, 5
produit externe, 4
produit scalaire, 46
projection canonique, 17
projection orthogonale, 44
puissance, 8, 9
Pythagore, 42

quotient, 17

racine simple, 4
rang, 7, 8, 11, 47
restriction, 15

scalaire, 41
scalaires, 5
scindé, 4
signature, 52
somme, 13
somme de vecteurs, 4
somme diagonale, 15
somme directe interne, 13
sommet, 36
sous-corps, 3
sous-espace caractéristique, 29
sous-espace engendré, 7
sous-espace propre, 22
sous-espace vectoriel, 5
stable, 14
sur-corps, 3
symétrique, 41

théorème fondamental de l'algèbre, 4
translaté, 17
triangularisable, 27

valeur propre, 21
vecteur, 5
vecteur propre, 21
vecteurs orthogonaux, 42