Introduction au langage et aux problématiques mathématiques par la géométrie classique

Christophe Hohlweg

29 juin 2011

Table des matières

Chapitre 1

Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

L'objectif de ce chapitre est multiple. Tout d'abord, nous allons essayer de donner une idée au lecteur du rôle des mathématiques en tant qu'outil de création pour la société. Les modèles mathématiques actuels sont beaucoup trop nombreux et souvent trop complexes pour être abordés dans un seul cours de premier niveau universitaire. Cependant, le développement des outils mathématiques utilisés en construction remonte à l'Antiquité et particulièrement au temps de la Grèce Antique [1] : ce modèle est la *géométrie euclidienne du plan et de l'espace*. Il fut et est encore utilisé en architecture. Le second objectif est de développer chez le lecteur un sens de la création en mathématique, ce qu'on appelle entre mathématiciens «l'intuition mathématique». Le troisième objectif est de montrer ce que sont le langage et le raisonnement mathématique ainsi que l'importance de bien apprendre à les manier précisément. Enfin, nous espérons réussir à amener le lecteur à saisir la différence entre une vérité mathématique, qui est absolue en tant que création dans un univers imaginaire et autoréférentiel, et une vérité réelle, qui n'est pas absolue et est sujette aux interprétations quant aux choix arbitraires des modèles mathématiques utilisés pour décrire la réalité.

La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont sans doute connus du lecteur. L'accent est mis sur la démonstration de ces résultats, le «pourquoi c'est vrai», la raison pour laquelle les prédictions mathématiques s'avèrent d'une redoutable précision. Finissons par citer un physicien bien connu :

> Comment se fait-il que les mathématiques, qui sont un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adaptent d'une manière si admirable aux objets de la réalité ? – Einstein, Albert

1. Les mathématiques en tant que domaine de savoir sont nées du temps de l'école pythagoricienne et la somme des connaissances acquises nous a été transmise grâce aux Élément d'Euclide, voir par exemple [Rittaud 2000]

1.1 Introduction

Commençons par un problème qui n'est peut-être pas si loin de la réalité historique que l'on pense.

> Il y a bien longtemps, au tout début de l'existence de la ville, un riche citoyen d'Athènes convoqua le plus habile architecte de la ville pour lui demander de lui construire une propriété aux formes parfaites. Il souhaitait que sa demeure soit un carré de 7 mètres [2] de côté ; que les murs soient aussi des carrés et enfin que le toit soit une pyramide parfaite (c'est-à-dire que les faces soient des triangles équilatéraux). De plus, il souhaitait que sa nouvelle demeure soit entourée d'une clôture en forme de carré, avec des côtés parallèles aux murs de la maison. Il désirait aussi que la longueur de chaque côté de la clôture soit égale à la hauteur de la pyramide formant le toit multipliée par la diagonale d'un mur.
>
> Le riche citoyen en question informa aussi l'architecte qu'il avait soumis ce projet à deux autres architectes et qu'il donnerait le contrat à celui qui prouverait qu'il réaliserait la construction de la plus parfaite manière.
>
> L'architecte, qui n'avait à sa disposition en ce temps là qu'une corde et un bout de bois d'un mètre de longueur pour tout outil de mesure et de tracé, dut se gratter la tête longtemps afin de développer les techniques qui lui seraient utiles pour contenter ce riche citoyen et le convaincre de la perfection de sa solution. Comment vous y prendriez-vous ? (N'oubliez pas que si un autre concurrent arrive avec un meilleure réponse, vous ne remportez pas le contrat.)

Nous allons nous servir de ce problème, auquel nous répondrons dans ce chapitre, pour illustrer nos propos. En face d'un tel problème, le mathématicien décompose les différents problèmes en sous-problèmes. Il faut tout d'abord se débarrasser des bruits de fond en se donnant des hypothèses de travail.

Hypothèses au sujet de la mise en oeuvre de la solution.
On suppose que l'architecte dispose :
- d'une équipe compétente de maçons, charpentiers, tailleurs de pierres, etc. ;
- de tous les matériaux bruts qu'il souhaite ;
- du bâton de bois comme unité de mesure (le mètre) ;
- d'une corde pour tracer des lignes droites entre deux points : il suffit de planter deux piquets et de tendre la corde entre ces deux piquets ;
- de la même corde pour tracer des cercles : il suffit de planter un piquet, d'y attacher la corde, de choisir une longueur de corde puis de tourner autour du piquet.

L'architecte ne dispose pas d'équerre ni de règle graduée, instruments trop imprécis pour construire une maison de cette taille. Son travail est maintenant de donner aux artisans une recette précise pour la construction. Nous sommes prêts à ce point à sortir du monde réel et à entrer dans celui des mathématiques afin d'imaginer ce fameux plan de construction.

2. Il n'y avait évidement pas d'unité de mesure tel que le mètre dans ce temps là ; nous l'utilisons ici par commodité.

Mathématisation du problème. Résumons ce dont nous avons besoin : nous devons savoir construire des carrés, des triangles équilatéraux, des cubes et des pyramides, rapporter des longueurs et les multiplier (pour la clôture) et tracer des parallèles. Le tout avec le moins d'approximation possible.

> En d'autre terme sachant que l'on sait tracer des droites et des cercles, il faut trouver une solution parfaite et convaincante pour reporter des longueurs, les multiplier, construire un angle droit, construire des triangles équilatéraux et tracer des parallèles.

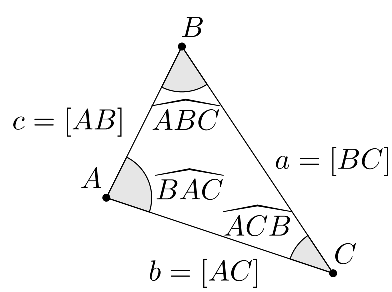
Pour répondre à cette question, nous allons tout d'abord nous en éloigner un petit peu – une habitude des mathématiciens – afin de mieux comprendre le contexte dans lequel se passe notre étude : on appelle cela *l'abstraction*.

1.1.1 Préliminaires et notations

Nous nous contenterons de l'idée intuitive d'objets tels que les points, les droites, les segments, les angles, les perpendiculaires, les droites parallèles, les plans, l'espace, les longueurs ou les distances, l'aire. Ce faisant, nous suivrons l'évolution historique du domaine de la géométrie. Les définitions formelles de ces objets en se basant sur le vocabulaire de la théorie des ensembles seront données dans le chapitre **??**. On se permettra tout de même l'utilisation de certains symboles du langage mathématique moderne. Nous invitons à cet effet le lecteur à lire au préalable l'annexe A, et à s'y référer au besoin au cours de sa lecture.

Les notations utilisées sont les suivantes :

- $\mathcal{P}$ pour un plan (longueur et largeur).
- $\mathcal{E}$ pour l'espace (longueur, largeur et épaisseur).
- Si A est un point d'un plan $\mathcal{P}$, alors on notera : $A \in \mathcal{P}$ (le symbole « $\in$ » se lit « appartient à » ou « élément de »).
- Si $A, B \in \mathcal{P}$, on notera (AB) la droite passant par les points A et B, $[AB]$ le segment allant du point A au point B et AB la longueur de ce segment.
- ABC est un triangle dont les sommets sont A, B et C d'un plan $\mathcal{P}$, les côtés sont $[AB], [BC]$ et $[AC]$ et les angles sont $\widehat{ABC} = \widehat{CBA}$, $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{BCA}$.
- Si d et d' sont deux droites du plan $\mathcal{P}$, on note $d \perp d'$ si d est perpendiculaire à d' et on note $d \parallel d'$ si d est parallèle à d'.



Pour donner une première idée de la façon dont nous allons présenter les mathématiques, nous rappelons ici la définition d'un cercle.

DÉFINITION. Soit $O, A \in \mathcal{P}$ deux points du plan. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par A (ou encore de rayon OA) est l'ensemble de tous les points M du plan tel que $OM = OA$; autrement dit

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \,|\, OM = OA\}.$$

Ce qui se lit : «$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que la longueur OM est égale à la longueur OA».

1.1.2 Construction à la règle et au compas

Dans l'antiquité, les mathématiciens ne connaissaient pas les nombres. Les mathématiciens grecs en particulier imaginaient les nombres comme des longueurs de segment : le nombre $AB = 5$ unités était en fait un segment qui était l'addition de cinq segments de longueur 1 unité. Ils se passionnaient pour les problèmes de construction, car seuls les constructions leur permettaient d'imaginer de nouveaux nombres (en créant de nouvelle longueur). Certains de ces problèmes, tel que la quadrature du cercle, sont restés insolubles jusqu'au XVIIIe siècles. Leurs règles pour la construction étaient simples, les voici :

On se donne :
- une unité (un bout de bois par exemple) ;
- une règle non graduée (pour les droites et segments) ;
- un compas (pour les cercles).

On peut donc :
- avec la règle : tracer le segment $[AB]$, et donc sa longueur AB, où A et B sont donnés ;
- avec la règle : tracer la droite (AB), où A et B sont donnés ;
- avec le compas : en se donnant deux points, O et A, tracer le cercle de centre O et de rayon OA.

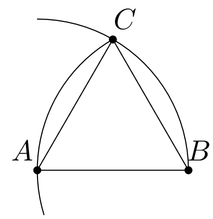
Dans la réalité, la corde jouait le rôle de règle et de compas comme on l'a vu auparavant, en fonction du nombre de points d'attache utilisé.

Report de longueurs à la règle et au compas La première question que l'on peut se poser est : étant donné un segment $[AB]$ de longueur AB et un point C, comment faire pour créer un segment $[CD]$ de longueur AB, c'est-à-dire tel que $CD = AB$? Rien de plus simple, avec le compas que l'on pointe en A et que l'on ouvre jusqu'à B on vient de prendre la mesure du segment AB. Il suffit alors de tracer le cercle de rayon AB et de centre C. Prenons maintenant n'importe quel point D sur ce cercle et traçons le segment $[CD]$ avec la règle. Bien évidement, $CD = AB$ qui est le rayon du cercle que l'on a tracé.

Comment construire un triangle équilatéral de côté $[AB]$ donné ?

DÉFINITION.

1. Soit $A, B \in \mathcal{P}$ distincts. On dit que $M \in \mathcal{P}$ est *équidistant à A et B* si $AM = BM$.
2. On dit que ABC est équilatéral si chacun de ses sommets est équidistant aux deux autres.



On trace le cercle de centre A et de rayon AB et le cercle de centre B et de rayon AB. Ces deux cercles se coupent en deux points. Appelons C l'un de ces points : C est équidistant de A et de B, donc $AB = AC = BC$ et donc ABC est un triangle équilatéral.

1.2 Quelques résultats classiques

Nous allons revisiter ici deux résultats classiques bien connus et non sans lien avec le problème qui nous intéresse : la somme des angles d'un triangle est un angle plat (c'est à dire π) ainsi que la règle du parallélogramme.

La question principale qui va nous guider tout au long de cette visite est : Pourquoi ces énoncés sont-ils vrais ?

1.2.1 Somme des angles d'un triangle

On considère l'énoncé suivant.

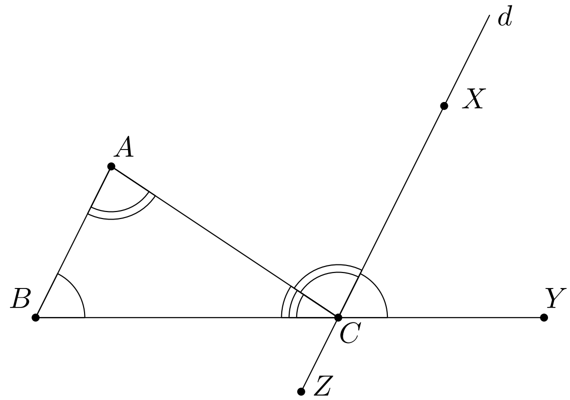
Proposition 1.1. *La somme des angles d'un triangle est un angle droit ($= \pi$).*

Pourquoi cet énoncé est-il vrai ? Donnons en la démonstration.

Démonstration. Soit ABC un triangle et soit d la droite parallèle à (AB) passant par C. Plaçons les points X et Z sur d, et le point Y sur (BC) afin de former des demi-droites (voir le dessin ci-dessous). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} &= \widehat{XCY} + \widehat{ACX} + \widehat{ACB} \\ &= \widehat{BCY} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

□



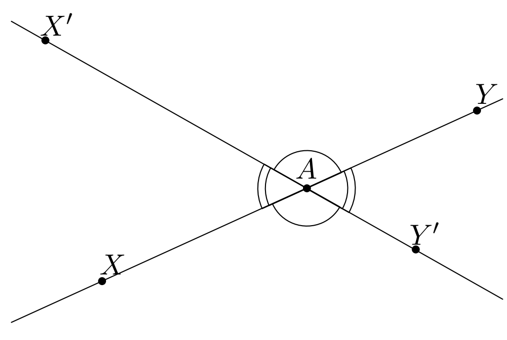
Si on analyse attentivement les arguments utilisés dans la preuve de cette proposition, on observe que la preuve est basé sur ≪le fait≫ suivant :

Les angles sont invariants par translation et les angles opposés sont égaux.

On est alors en droit, on en a même le devoir, de poser à nouveau la question suivante : Pourquoi cet énoncé est-il vrai ? Avant de répondre à cette question, traduisons cet énoncé dans une forme mathématique plus concrète avec laquelle on pourra travailler.

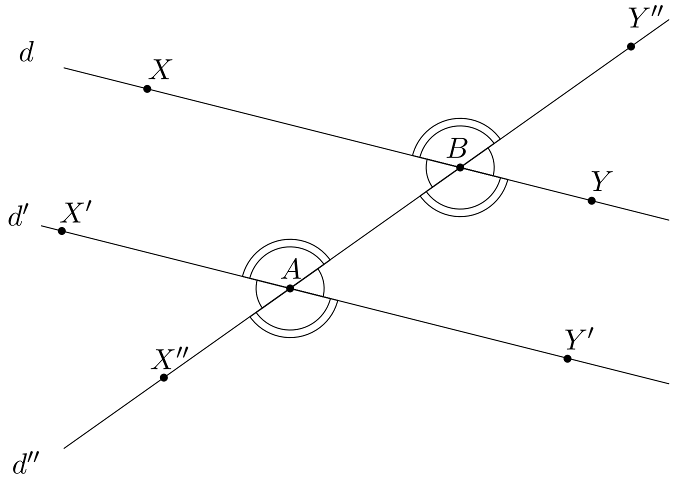
Énoncé 1 : Soit d et d' deux droites sécantes alors les angles opposés par le point d'intersection sont égaux. Cet énoncé se ≪mathématise≫ de la façon suivante : en choisissant deux points X, Y sur d et deux points X', Y' sur d' tels que le point d'intersection A de d et d' soit entre X et Y et entre X' et Y', on peut alors écrire les égalités suivantes :

$$\widehat{X'AY} = \widehat{XAY'} \text{ et } \widehat{YAY'} = \widehat{XAX'}.$$



Énoncé 2 : Les angles sont invariants par translation. Cette situation se ≪mathématise≫ de la façon suivante : soit d et d' deux droites parallèles et d'' une droite sécante à d et d', en posant des points comme avant, on obtient (en se servant aussi de l'Énoncé 1) :

$$\widehat{XBY''} = \widehat{X''BY} = \widehat{X''AY'} = \widehat{X'AY''} \qquad \text{et} \qquad \widehat{XBX''} = \widehat{Y''BY} = \widehat{X'AX''} = \widehat{Y''AY'}.$$



Que penser de ces énoncés ? Sont-ils vrais ? Peuvent-ils se démontrer ? Si oui, on est certain que la somme des angles d'un triangle est π ; si non ... on est certain de rien. Dans les faits :

– l'Énoncé 1 peut se démontrer :

  Démonstration de l'Énoncé 1. $\pi = \widehat{X'AY} + \widehat{YAY'} = \widehat{X'AY} + \widehat{XAX'} \Rightarrow \widehat{YAY'} = \widehat{XAX'}$. De même pour l'autre égalité. □

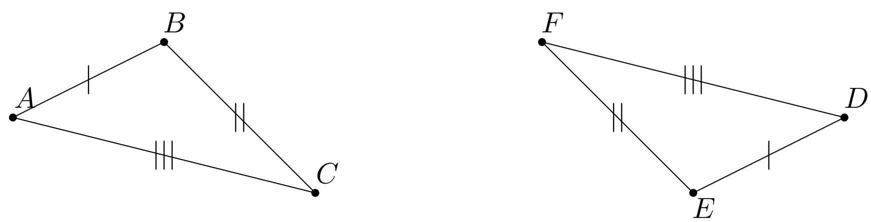
– l'Énoncé 2 ne peut pas se démontrer ! On l'appelle un *axiome*. Un axiome est une règle, une hypothèse, que l'on se donne et qui définit le cadre dans lequel on va produire des vérités mathématiques. Un axiome n'est pas produit au hasard, cet axiome en particulier est issu du fait que les mathématiciens grecs voulaient créer un modèle mathématique qui décrirait les réalités géométriques qu'ils observaient dans la nature. En quelque sorte, un axiome est une idéalisation d'une loi de la nature afin de créer un modèle mathématique de ce même phénomène naturel. Nous reviendrons plus en détails sur les axiomes de la géométrie euclidienne plus tard dans ce chapitre.

  Donc, dans le cadre de la géométrie euclidienne où l'Énoncé 2 est vrai, car posé en axiome, la somme des angles d'un triangle est π.

1.2.2 Triangles isométriques

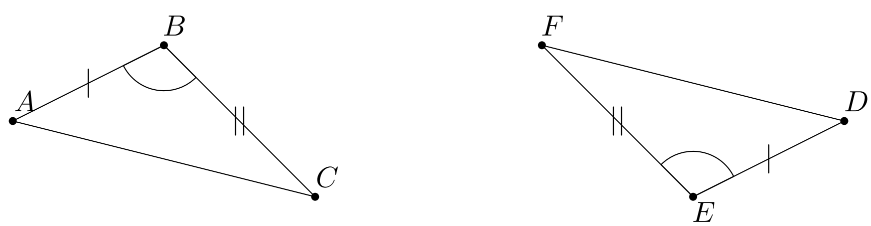
Revenons aux triangles. Les triangles ont été considérés par les mathématiciens grecs comme les objets élémentaires du plan : constitués de trois points distincts et non alignés, reliés par des arêtes ou côtés, les triangles vivent dans un plan $\mathcal{P}$. Mais si un triangle est constitué de trois points fixes, que peut-on dire d'un autre triangle dont les côtés sont en tout point identiques à ceux du triangle de départ ? On observe par exemple que les angles adjacents aux cotés de même longueur sont aussi égaux. Mais une observation n'est pas une preuve, alors, pourquoi cet énoncé est-il vrai ? Commençons par ≪mathématiser≫ cet énoncé en le précisant même un peu.

DÉFINITION. Deux triangles sont dit *isométriques* si leurs trois côtés sont respectivement isométriques (i.e. de longueur égale).



Énoncé 3 : Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Deux triangles sont isométriques ;
2. Deux triangles ont deux côtés respectivement isométriques adjacents à un même angle.



3. Deux triangles ont un côté isométrique compris entre deux angles respectivement égaux.

Remarque. Cette règle signifie que (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).

À nouveau le mathématicien se poserait immanquablement les questions suivantes : est-ce que cet énoncé est vrai ? Si oui, comment le démontrer ? C'est en explorant ce genre de question que les mathématiques se sont développés. Dans ce cas, nous ne sommes à nouveau pas capable de démontrer cet énoncé, cette propriété est encore un *axiome*. On peut par contre en déduire la propriété bien connue suivante en utilisant l'équivalence (1) $\iff$ (2) tout en alternant successivement les rôles de A B et C.

Corollaire 1.2. *Si deux triangles sont isométriques, alors leurs angles sont égaux.*

Remarque. La réciproque de cet énoncé est fausse : deux triangles dont les angles sont égaux ne sont pas forcément isométriques. On peut penser par exemple à deux triangles équilatéraux dont l'un est plus petit que l'autre. On dit que que deux triangles dont les angles sont deux à deux égaux sont *semblables*.

1.2.3 Règle du parallélogramme

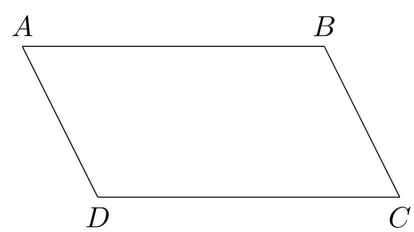
Le rôle du parallélogramme est prépondérant comme outil de démonstration, mais aussi comme outil de construction comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre. Nous allons tout d'abord commencer par rappeler la *règle du parallélogramme*.

Proposition 1.3 (Règle du parallélogramme)**.** *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$ABCD$ est un parallélogramme.*
2. *$AB = CD$ et $AD = BC$.*
3. *les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu.*
4. *$AB = CD$ et $(AB) \parallel (CD)$.*

Comme avant, posons nous les questions suivantes : quelle est la définition d'un «parallélogramme» ? Pourquoi cet énoncé est-il vrai ? La définition ne pose évidement pas de problème, rappelons là tout de même afin de s'habituer à la manière de présenter les textes mathématiques.

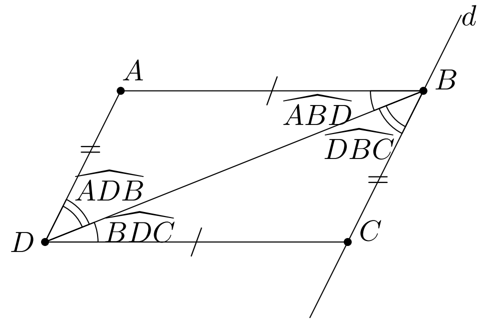
Définition. Un parallélogramme $ABCD$ est la donnée de quatre points A, B, C et D de $\mathcal{P}$ tel que $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.



Remarque. C'est un quadrilatère convexe (i.e. non croisé).

Démonstration de la règle du parallélogramme. Montrons (1) $\iff$ (2) (Le reste des équivalences est laissé en exercice).

((1) $\Longrightarrow$ (2)) Afin de démontrer cette implication, il suffit de montrer que les triangles ABD et BCD sont isométriques. On a $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ et $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (en traçant la diagonale (BD)), car $(AD) \parallel (BC)$. Ainsi, ABD et BDC sont isométriques, donc $AB = CD$ et $AD = BC$.



((2) $\Longrightarrow$ (1)) L'hypothèse de départ est $AB = CD$ et $AD = BC$. On veut montrer que $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$. Soit d la droite parallèle à (AD) passant par B. On veut montrer que $d = (BC)$. Comme $AB = CD$ et $AD = BC$, les triangles ABD et BDC sont isométriques, car $BD = BD$. Ainsi, $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$. Soit C' un point sur d du même côté de (AB) que C. Alors on obtient que :

$$\begin{aligned} \widehat{ADB} = \widehat{DBC'} &\Longrightarrow \widehat{CBC'} = \widehat{CBD} + \widehat{DBC} = \pi \\ &\Longrightarrow C, B, C' \text{ sont alignés.} \\ &\Longrightarrow C' \in (BC) \text{ et donc } d = (BC') = (BC) \parallel (AD). \end{aligned}$$

On procède de même avec $(AB) \parallel (DC)$.

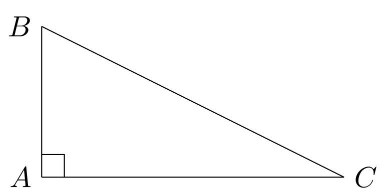
□

1.2.4 Première construction d'un angle droit

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, soit $[BC]$ un diamètre de $\mathcal{C}$ et $A \in \mathcal{C} \setminus \{B, C\}$. Alors ABC est un triangle rectangle en A.*

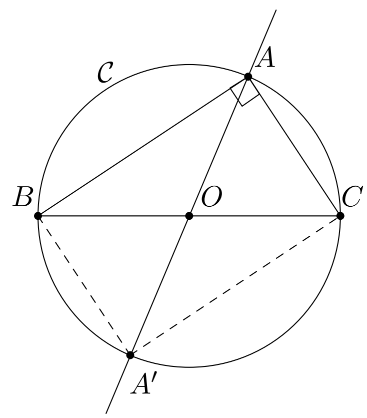
Comme avant, posons nous les questions suivantes : quelle est la définition d'un ≪triangle rectangle en A≫ ? Pourquoi cette énoncé est-il vrai ? La définition ne pose pas non plus ici de problème, rappelons là tout de même afin de s'habituer à la manière de présenter les textes mathématiques.

Définition. On dit qu'un triangle ABC est rectangle en A si $\widehat{BAC} = \pi/2$ (angle droit). Le segment $[BC]$ est l'hypoténuse de ABC.



Démonstration de la proposition 1.4. Soit $A \in \mathcal{C}$ tel que $A \neq B, A \neq C$. Alors, ABC est un triangle et $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à ABC. Ainsi O est le point milieu de $[BC]$.

Soit $A' \in (AO)$ tel que O milieu de $[AA']$. Donc $A' \in \mathcal{C}$, car $AO = OA'$. Le quadrilatère $ACA'B$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu O, c'est donc un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont de même longueur ($BC = 2OB = 2OA = AA'$), c'est dont un rectangle (voir exercice 1.2). D'où ABC est un triangle rectangle en A. □

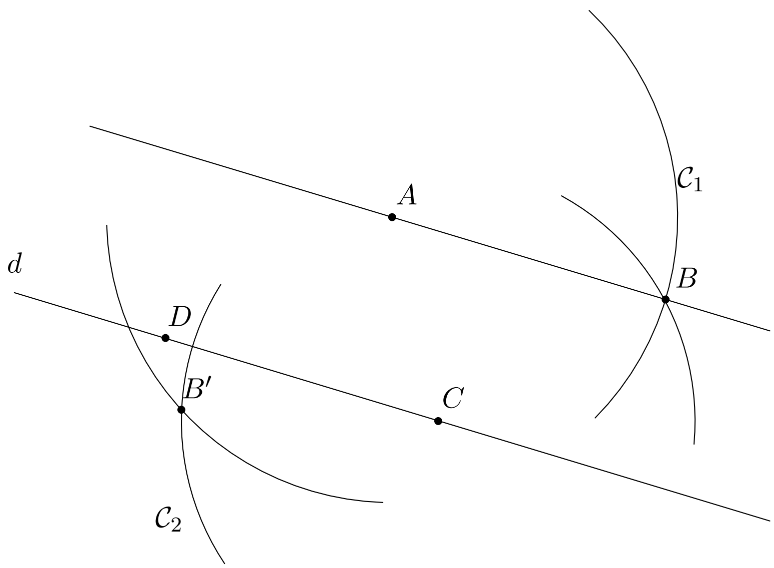


Construction d'un angle droit et d'une équerre. Pour construire un angle droit, il suffit de tracer un cercle puis de tracer un diamètre $[BC]$ et enfin de choisir un point A sur ce cercle qui n'est pas sur le diamètre. L'angle $\widehat{BAC}$ est donc un angle droit. Autrement dit, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Il suffit donc pour construire une équerre de prendre une planche de bois, d'y tracer un cercle puis de tracer un diamètre et enfin de choisir un point sur ce cercle qui n'est pas sur le diamètre. On scie pour obtenir un triangle rectangle en vertu de la proposition ci-dessus.

1.2.5 Construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné ?

On se donne un droite d et un point $A \notin d$.



On va utiliser ce que l'on sait du parallélogramme. On trace deux points C et D sur d. Il suffit maintenant de construire le point B pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. En effet, on aura ainsi que $d = (CD) \parallel (AB)$ et (AB) sera la droite parallèle à d passant par A.

Pour cela, il suffit de tracer le point B tel que $AB = DC$ et $AB = BC$. Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A et de rayon DC et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre C et de rayon AD. Ces deux cercles se coupent en deux points : seul l'un de ces deux points fera en sorte que $ABCD$ soit un parallélogramme, c'est celui du même côté que A de d (sinon (AB) couperait d). Il suffit alors de tracer la droite (AB).

1.3 Les théorèmes de Pythagore et de Thales

Nous présentons ici ce qui est sans nul doute les deux théorèmes les plus célèbres issus des recherches des mathématiciens grecs.

1.3.1 Théorème de Pythagore

Intéressons nous d'abordt à l'un des résultats mathématiques les plus connu.

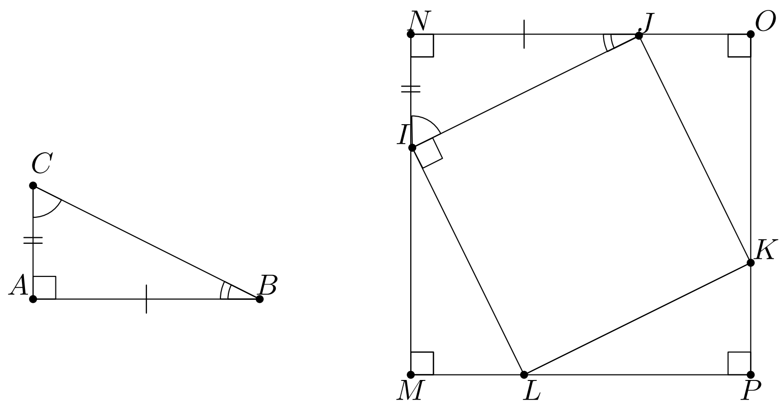
Théorème 1.5 (Théorème de Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle, alors :*

$$ABC \text{ est rectangle en } B \iff AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) On considère un carré $MNOP$ de côté $\alpha = AB + BC$. On place les points I, J, K et L comme suit :

$$I \in [MN] \quad \text{et} \quad MI = AB \text{ (donc } IN = BC)$$

$$\begin{array}{lll} J \in [ON] & \text{et} & NJ = AB \text{ (donc } JO = BC) \\ K \in [OP] & \text{et} & OK = AB \text{ (donc } KP = BC) \\ L \in [MP] & \text{et} & PL = AB \text{ (donc } ML = BC) \end{array}$$



On obtient ainsi que les triangles MLI, NIJ, JOK et KPL sont rectangles et isométriques à ABC. En particulier,

$$\begin{cases} IJ = JK = KL = IL = AC \\ \widehat{NIJ} = \widehat{ILM} = \widehat{BCA} \\ \widehat{MIL} = \widehat{NJI} = \widehat{CAB}. \end{cases}$$

Donc $\widehat{JIL} = \pi = \widehat{NIJ} - \widehat{MIL} = \pi - \widehat{BCA} - \widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \pi/2$.
Donc $IJKL$ est un carré. D'où $Aire(MNOP) = Aire(IJKL) + 4 \cdot Aire(ABC)$
$\Longrightarrow (AB + BC)^2 = AC^2 + 4 \cdot \frac{AB \cdot BC}{2}$
$\Longrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$.

($\Longleftarrow$) Soit h la hauteur issue de C dans ABC. On veut montrer que $h = (BC)$. Soit I le point d'intersection de h avec (AB), alors montrons que $IB = 0$ et donc que $I = B$.
Comme AIC et BIC sont rectangles en I, on a par le sens direct du théorème, démontré ci-dessus, que :

$$IC^2 + IB^2 = BC^2 \text{ et } IA^2 + IC^2 = AC^2.$$

Comme $AB = AI + IB$ et $AB^2 + BC^2 = AC^2$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} & IA^2 + IC^2 = (AB - IB)^2 + IC^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + IC^2 + IB^2 \\ \Longrightarrow \quad & AB^2 + IB^2 - 2IB \cdot AB + IC^2 = AB^2 + IC^2 + IB^2 \\ \Longrightarrow \quad & IB \cdot AB = 0 \Rightarrow IB = 0 \text{ car } AB \neq 0. \end{aligned}$$

Donc ABC est rectangle en B.

$\square$

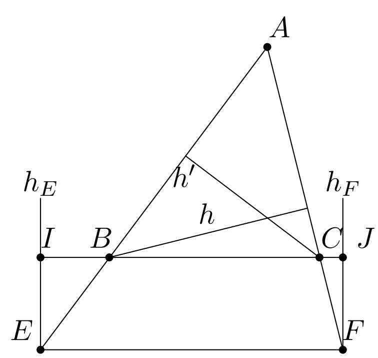
Application. Le théorème de Pythagore permet surtout de tester si deux droites sont perpendiculaires ou non. Pour cela, il suffit de nommer A le point d'intersection de ces deux droites, de prendre un point B sur la première et un point C sur la deuxième puis de calculer AB^2, AC^2 et BC^2. Si $AB^2+AC^2 = BC^2$, ces deux droites sont perpendiculaires, sinon elles ne le sont pas en vertu du théorème de Pythagore.

1.3.2 Théorème de Thalès

Voici maintenant l'autre résultat majeur issu des travaux des géomètres de la Grèce Antique. Bien entendu, comme avant, nous allons nous intéresser au pourquoi ce théorème est vrai.

Théorème 1.6 (Théorème de Thalès). *(i) Soit ABC et AEF deux triangles tels que $B \in (AE)$ et $C \in (AF)$. Si $(BC) \parallel (EF)$, alors $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.*

(ii) Réciproquement, soit ABC et AEF deux triangles tels que $B \in (AE)$ et $C \in (AF)$. Si $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, alors $(BC) \parallel (EF)$.



Démonstration. (i) Soit h la hauteur issue de B dans le triangle ABC. Alors

$$\left.\begin{array}{l} Aire(ABC) = \frac{AC \cdot h}{2} \\ Aire(ABF) = \frac{AF \cdot h}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{Aire(ABF)}{Aire(ABC)}.$$

De même, avec la hauteur h' issue de C dans ABC, on montre que $\frac{AE}{AB} = \frac{Aire(AEF)}{Aire(ABC)}$.

Il faut maintenant montrer que $Aire(AEC) = Aire(ABF)$ ou encore que $Aire(BCE) = Aire(BCF)$. Soit h_E la hauteur issue de E dans BCE qui coupe (BC) en I et h_F la hauteur issue de F dans BCF qui coupe (BC) en J. Comme $(BC) \parallel (EF)$, alors $h_E \parallel h_F$ et donc $IJFE$ est un rectangle. Ainsi $IE = JF$ et on obtient que

$$Air(BCE) = \frac{1}{2}(BC \cdot IE) = \frac{1}{2}(BC \cdot JF) = Aire(BCF)$$

D'où $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$. La preuve de l'égalité $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ est laissée en exercice.

(ii) Soit d la parallèle à (BC) passant par E et soit F' l'intersection de d avec AF. Par (i), on a que

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AF'}{AC}.$$

Comme $AF' = AF$ et comme F, F' sont sur (AC) on obtient alors que $F = F'$. On en déduit que $d = (EF') = (EF)$ et donc que $d \parallel (BC)$.

□

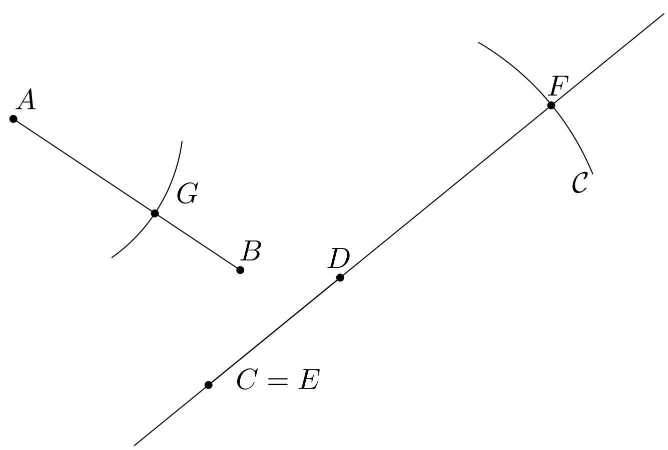
1.3.3 Les nombres constructibles

La constructibilité des nombres à la règle et au compas est importante. Nous allons voir par exemple que nous pouvons construire $\sqrt{2}$, la question est maintenant : peut-on construire n'importe quel nombre ? Donnons un sens mathématique à cela.

DÉFINITION. Un nombre a est constructible s'il existe $A, B \in \mathcal{P}$ que l'on peut construire à la règle et au compas tel que $a = AB$. Autrement dit, s'il existe un segment $[AB]$ de longueur a que l'on peut construire à la règle et au compas.

Un exemple de nombre constructible est $\sqrt{2}$. Une question importante est : peut-on additionner, soustraire, multiplier ou diviser des nombres constructibles ?

i) Addition : On se donne deux segments $[AB]$ et $[CD]$. Peut-on construire un segment $[EF]$ tel que $EF = AB + CD$?



On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre D et de rayon AB. Alors $\mathcal{C}$ coupe (CD) en deux points, l'un deux que l'on nomme F fait en sorte que C, D et F sont alignés dans cette ordre. Il suffit donc de poser $E = C$ et on obtient :

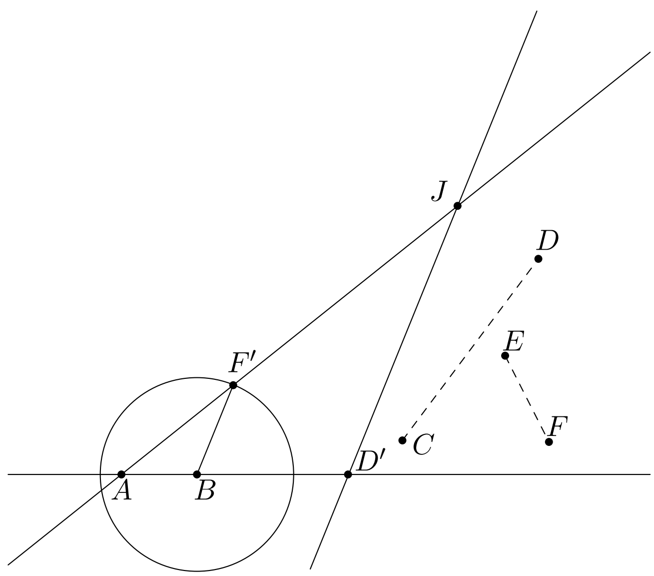
$$EF = CD + DF = CD + AB.$$

ii) Soustraction : On suppose que $AB > CD$. On trace le cercle de centre A et de rayon CD. On appelle G le point d'intersection de $[AB]$ avec le cercle. Alors.

$$AB = AG + GB \Longrightarrow GB = AB - CD, \text{ car } AG = CD.$$

iii) Multiplication : On se donne une unité (un segment $[AB]$ tel que $AB = 1$). Soit deux segments $[CD]$ et $[EF]$, peut-on construire un segment $[IJ]$ tel que $IJ = CD \cdot EF$?

Oui, grâce au théorème de Thalès :



On reporte la longueur CD sur la droite (AB) et on construit D' tel que $AD' = CD$ et $B \in [AD']$. On trace le cercle de centre B et de rayon EF. Puis on trace un droite passant par A et coupant ce cercle en F', donc $BF' = EF$.

On trace maintenant la parallèle à (BF') passant par D' et on note J son intersection avec (AF'). Alors, par le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{D'J}{DF'} = \frac{AD'}{AB} \iff \frac{D'J}{EF} = \frac{CD}{1} \Longrightarrow D'J = EF \cdot CD.$$

iv) Division : À faire à l'exercice 1.5 (4)

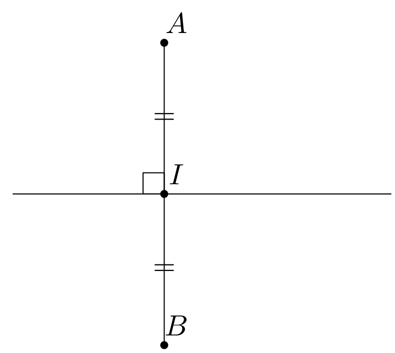
La recherche des nombres constructibles débouchera sur le développement de l'algèbre et de la théorie de Galois (groupe). Par exemple, l'impossibilité de la quadrature du cercle se traduit par le fait que le nombre π n'est pas constructible.

1.4 Médiatrice et autres constructions à la règle et au compas

1.4.1 Médiatrice

DÉFINITION. Soit $A, B \in \mathcal{P}$ distincts. La *médiatrice* du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Exemple. : Si I est le point milieu de $[AB]$, alors $IA = IB$. Donc I est équidistant à A et B et I est aussi sur la médiatrice de $[AB]$.



Cette observation se généralise comme suit.

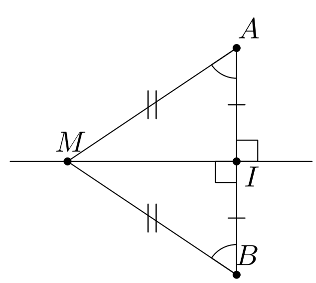
Proposition 1.7. *Soit $M \in \mathcal{P}$, alors M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si M est équidistant à A et à B.*

Démonstration. Notons d la médiatrice de $[AB]$ et I le milieu de $[AB]$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $M \in d$. Alors les triangles MIA et MIB sont isométriques car

$$\begin{cases} AI & = & IB \\ MI & = & MI \\ \widehat{MIA} & = & \widehat{MIB} = \pi/2 \end{cases}.$$

D'où $AM = BM$ et donc M est équidistant à A et à B.



($\Longleftarrow$) Supposons que M est équidistant à A et à B. Il suffit de montrer que $(IM) \perp (AB)$, car il n'y a qu'une unique droite perpendiculaire à (AB) passant par I.
Le triangle AMB est isocèle en M, car $AM = BM$, donc $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$.
On obtient ainsi :

$$\left.\begin{array}{lcl} MA & = & MB \\ AI & = & IB \\ \widehat{MAI} & = & \widehat{MBI} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{les triangles } MAI \text{ et } MBI \text{ sont isométriques.}$$

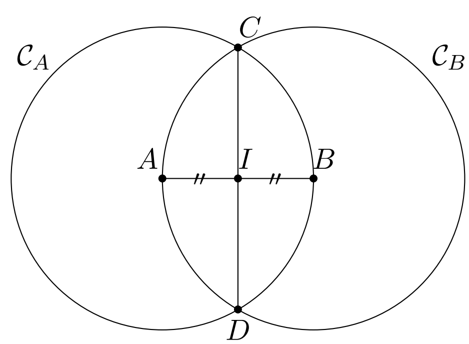
D'où

$$\begin{aligned} \widehat{MIB} + \widehat{MIA} &= \widehat{BIM} + \widehat{MIA} \\ &= \widehat{BIA} \\ &= \pi, \text{ car } B, I, A \text{ sont alignés.} \end{aligned}$$

Donc $\widehat{MIB} = \pi/2$ et finalement on obtient que $(IM) \perp (AB)$.

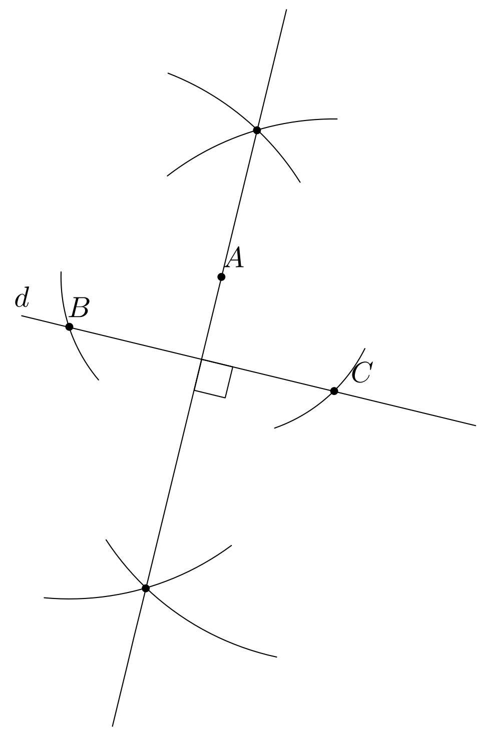
$\square$

1.4.2 Comment construire le milieu d'un segment (et sa médiatrice) ?



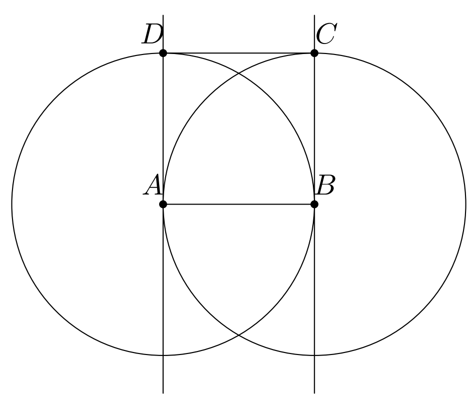
On trace le cercle $\mathcal{C}_A$ de centre A et de rayon AB et le cercle $\mathcal{C}_B$ de centre B et de rayon AB. Ils se coupent en deux points C et D : (CD) est la médiatrice du segment $[AB]$. Le milieu de $[AB]$ est le point d'intersection I des doites (AB) et (CD).

1.4.3 Comment tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donnée ?



On trace un cercle de centre A et de rayon suffisamment grand pour que le cercle coupe d en deux points B et C. Ces deux points sont équidistants de A, donc A est sur la médiatrice de $[BC]$, qui est la perpendiculaire à d passant par A. Il suffit donc de tracer la médiatrice à $[BC]$ (voir section 1.4.2).

1.4.4 Comment construire un carré dont un côté est un segment $[AB]$ donné ?



On trace la perpendiculaire à (AB) passant par A et la perpendiculaire à (AB) passant par B (voir section 1.4.3).

Puis on reporte la longueur AB sur ces perpendiculaires en traçant les cercles de rayon AB et de centres A et B.

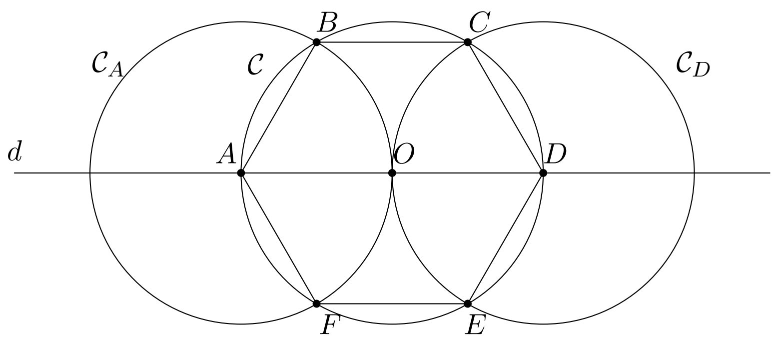
On obtient les points C et D (du même côté) de la droite (AB). Donc $AB = AD = BC$ et $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \pi/2$: $ABCD$ est un carré !

Comment tracer un segment de longueur $\sqrt{2}$?

On se donne un segment unité $[AB]$: $AB = 1$. On trace le carré $ABCD$ de côté $1 = AB$, puis sa diagonale $[BD]$. Alors par le théorème de pythagore $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$.

1.4.5 Comment construire un hexagone régulier ?

Définition. Un hexagone régulier $ABCDEF$ est la donnée de 6 points tels que $AB = BC = CD = DE = EF = AF$ et les angles sont tous $2\pi/3$.



On considère une droite d et un point $O \in d$. On trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. On appelle A et D les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d. On trace les cercles $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_D$ de centre A et D respectivement et de même rayon $OA = OD =$ rayon de $\mathcal{C}$.

On note B, C, E, F les nouveaux points obtenus par l'intersection de $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_D$ et $\mathcal{C}$. Les triangles OAB et OAF sont équilatéraux, car $OB = OA = OF = AF = AB$, donc

$$\widehat{BAF} = \widehat{BAO} + \widehat{OAF} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Ainsi $ABCDEF$ est un hexagone régulier.

Remarque. Le problème de la constructibilité des polygones réguliers fut résolu par Gauss et Wantzel (1796-1837) :

Théorème 1.8. Un polygone régulier est constructible si et seulement si son nombre de sommet (n) est le produit de puissance de 2 et de nombres premiers distincts de la forme $2^{2^k} + 1$.

Ex : $n = 2, 3, 4, 5 = 2^{2^1} + 1, 6 = 2 \cdot (2^1 + 1), 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, ...$

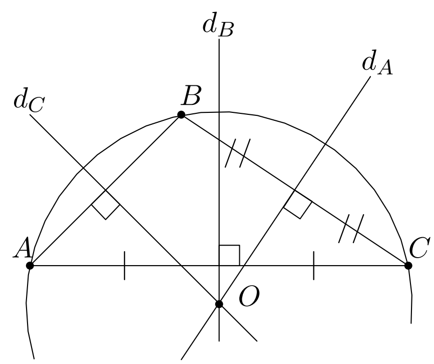
1.5 Triangles, droites et points remarquables

1.5.1 Médiatrice et cercle circonscrit

DÉFINITION. Si ABC est un triangle, le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle qui passe par A, B et C.

Il faudrait se poser la question si un tel cercle existe. La réponse est oui comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.9. *Soit ABC un triangle, alors ses médiatrices sont concourantes (se coupent au même point) en le centre du cercle circonscrit à ABC.*



Démonstration. Soit d_A la médiatrice de $[BC]$, d_B la médiatrice de $[AC]$, d_C la médiatrice de $[AB]$ et O le point d'intersection de d_A et d_B. On va montrer que $d_A \cap d_C = \{O\}$. Notons que $d_A \cap d_B \neq \emptyset$, car sinon on aurait que $d_A \parallel d_B$, ce qui impliquerait A, B, C alignés, ce qui est impossible puisque ABC est un triangle. On a $OA = OC$, car $O \in d_B$, et $OB = OC$, car $O \in d_A$. D'où $OA = OB$. D'où $O \in d_C$, il s'en suit que $\{O\} = d_A \cap d_C$. □

Corollaire 1.10. *Soit $A, B, C \in \mathcal{P}$ non alignés, alors il existe un unique cercle passant par A, B et C.*

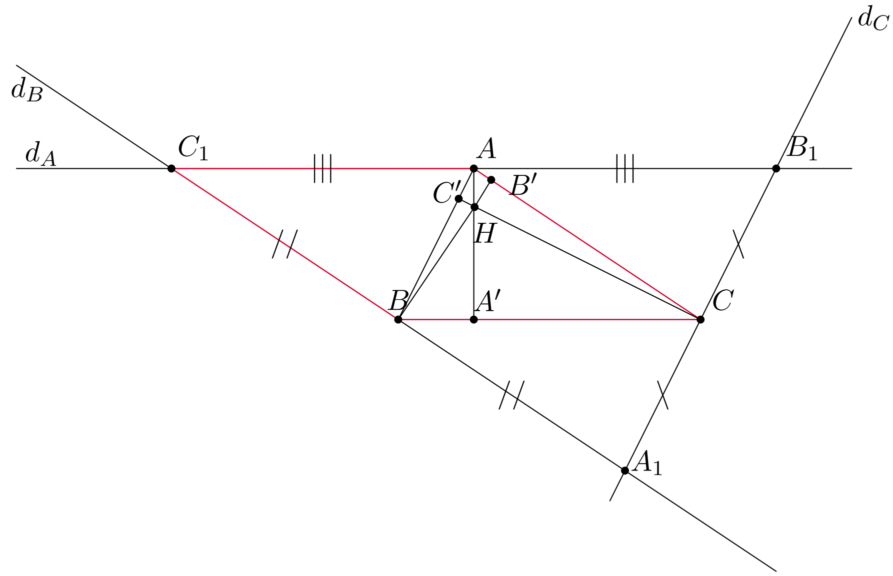
Démonstration. **Existence :** L'existence suit du fait que ABC est un triangle, on peut alors prendre le cercle circonscrit à ABC.

Unicité : Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O passant par A, B et C, alors $OA = OB = OC$. Ainsi O est le point d'intersection des médiatrices de ABC et donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à ABC.

□

1.5.2 Hauteurs et orthocentre d'un triangle

Proposition 1.11. *Les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes au même point H, appelé l'orthocentre de ABC.*



Démonstration. Soit A' le point d'intersection de (BC) avec la hauteur issue de A, B' le point d'intersection de (AC) avec la hauteur issue de B et C' le point d'intersection de (AB) avec la hauteur issue de C. Les hauteurs sont donc $(AA'), (BB')$ et (CC').

Soit d_A la parallèle à (BC) passant par A, d_B la parallèle à (AC) passant par B et d_C la parallèle à (AB) passant par C. On a que d_A, d_B et d_C ne sont pas parallèles, car $(AB), (BC)$ et (AC) ne le sont pas (ABC est un triangle).

Soit A_1 tel que $\{A_1\} = d_B \cap d_C$, B_1 tel que $\{B_1\} = d_A \cap d_C$ et C_1 tel que $\{C_1\} = d_A \cap d_B$. De ce fait, on obtient que $ACBC_1$ et AB_1CB sont des parallélogrammes. Donc $C_1A = BC = AB_1 \Rightarrow A$ est le milieu de $[B_1C_1]$.

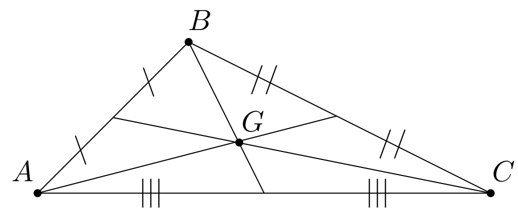
De même, on montre que B est le milieu de $[A_1C_1]$ et que C est le point milieu de $[A_1B_1]$. Comme $(A_1C_1) \parallel (AC)$ et $(BB') \perp (AC)$, alors $(BB') \perp (A_1C_1)$. Comme B est le milieu de $[A_1C_1]$, on en déduit que (BB') est la médiatrice de $[A_1C_1]$.

De même, on montre que (CC') est la médiatrice de $[A_1B_1]$ et que (AA') est la médiatrice de $[B_1C_1]$.

Donc $(AA'), (BB')$ et (CC') sont les médiatrices du triangle $A_1B_1C_1$ et sont donc concourantes. $\square$

1.5.3 Médianes et centre de gravité

Proposition 1.12. *Soit ABC un triangle, alors ses médianes sont concourantes au centre de gravité du triangle : ce point G est situé au 2/3 de chaque médiane à partir du sommet correspondant.*



Démonstration. Voir exercice 1.12. □

1.6 Axiomes de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace

Nous avons rencontré précédemment deux axiomes, la règle de *l'invariance des angles par translation* et la règle des *triangles isométriques.* On a vu l'importance de ces axiomes dans le processus déductif qui nous a permis de démontrer plusieurs résultats fondamentaux en géométrie. Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à la notion d'axiome. Lorsqu'un mathématicien se place dans un contexte particulier, ici la géométrie euclidienne du plan et de l'espace, il se dote avant tout de « règle du jeu », d'axiomes, qui sont un ensemble de principe régissant ce monde mathématique particulier. L'objectif étant de se servir de ces seuls axiomes pour expliquer, c'est-à-dire démontrer, toutes les observations qu'il peut faire dans ce contexte particulier. L'avantage d'une telle méthode déductive est par exemple lorsque le mathématicien rencontre un environnement dans lequel tous les axiomes de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace sont vérifiés, il sait alors automatiquement que tous les résultats connus en géométrie euclidienne y seront valides.

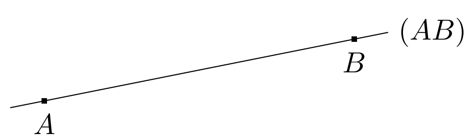
Notons que la liste présentée dans ce chapitre n'est pas exhaustive. Nous n'exposerons pas par exemple les axiomes concernant les angles, ces derniers seront bien définis au chapitre **??**.

On se rappellera que des axiomes sont des énoncés qui ne se démontrent pas, mais ils sont posés comme «règle du jeu» en géométrie euclidienne du plan et de l'espace. Nous allons articuler cette section autour de l'objectif suivant : développer l'idée qu'en mathématiques beaucoup de résultats sont en fait contraints par très peu d'hypothèses de bases (les axiomes).

1.6.1 Axiomes des droites

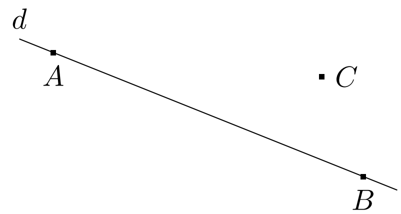
Tout d'abord, nous allons présenter quelques principes de base qui régissent les droites, les plans et l'espace.

Axiome I : Soit A, B deux points dans l'espace $\mathcal{E}$, il *existe* une *unique* droite passant par A et B. On note cette droite (AB).



Nous ≪ savons bien ≫ qu'il existe toujours un point qui n'est pas sur une droite donnée et que sur cette droite on peut toujours prendre deux points distincts, c'est en fait un axiome.

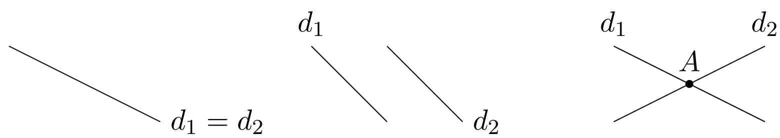
Axiome II : Soit d une droite de l'espace $\mathcal{E}$, alors il existe deux points distincts $A, B \in d$, $A \neq B$, tels que $d = (AB)$ et il existe $C \in P$ tel que $C \notin d$.



Application (position relative de deux droites) On peut déjà déduire de ces deux seuls axiomes les propriétés bien connues suivantes. Il est intéressant d'observer que ces propriétés, bien que naturelles dans l'imaginaire collectif, ne sont pas des axiomes mais se déduisent immanquablement des deux axiomes ci-dessus.

Proposition 1.13. *Soit d_1 et d_2 deux droites de l'espace, alors on a l'un des cas suivants :*

1. *il existe un point $A \in \mathcal{E}$ tel que $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ (on dit que d_1 et d_2 sont sécantes) ;*
2. *$d_1 = d_2$;*
3. *$d_1 \cap d_2 = \emptyset$.*



Démonstration. Si $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ on se trouve dans la troisième situation. Supposons maintenant qu'il existe un point $A \in d_1 \cap d_2$. Alors on a deux cas : soit $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, ce qui est la première situation, soit il existe au moins un autre point $B \in d_1 \cap d_2$ distinct de A. Dans ce cas $A, B \in d_1$ et $A, B \in d_2$. Le premier axiome nous garantit alors que $d_1 = (AB) = d_2$, ce qui est la deuxième situation. □

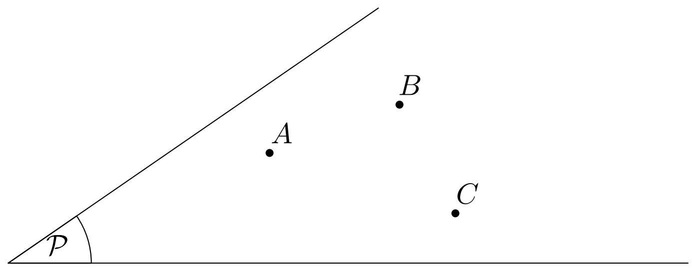
Remarque. La situation $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ ne veut pas forcément dire que ces droites sont parallèles dans l'espace. Nous allons revenir sur ce point un plus loin dans cette section.

Bien entendu, un lecteur pourrait se demander pourquoi nous ne prenons pas pour axiome toutes les propriétés qui nous semblent naturelles. Et bien, une des raisons est que le mathématicien aime à réduire au maximum ses hypothèses de travail afin de maximiser ce qu'il doit retenir et aussi afin de rendre ses prédictions les plus précises possibles. En quelque sorte, on pourrait dire que le mathématicien croit que moins il y a d'inconnus, ici les axiomes, plus les prédictions seront fiables.

On va maintenant se doter de règles concernant les plans.

1.6.2 Axiomes des plans

Axiome III : Par trois points non alignés passe un et un seul plan. On note ce plan $\mathcal{P} = (ABC)$.



Ceci donné, on se pose la question de savoir si on peut déduire de ce troisième axiome si la droite (AB) est entièrement contenue dans le plan, c'est-à-dire, si n'importe quel point de (AB) est aussi un point de (ABC) ? La réponse est non, nous posons de ce fait ce quatrième axiome.

Axiome IV : Si A et B sont deux points d'un plan $\mathcal{P}$, alors (AB) est entièrement incluse dans ce plan. On note $(AB) \subseteq \mathcal{P}$.

Application 1 : on peut déduire avec l'ajout de ces axiomes la propriétés bien connue suivante. Il est à nouveau intéressant d'observer que cette propriété se déduit immanquablement des axiomes ci-dessus.

Proposition 1.14.

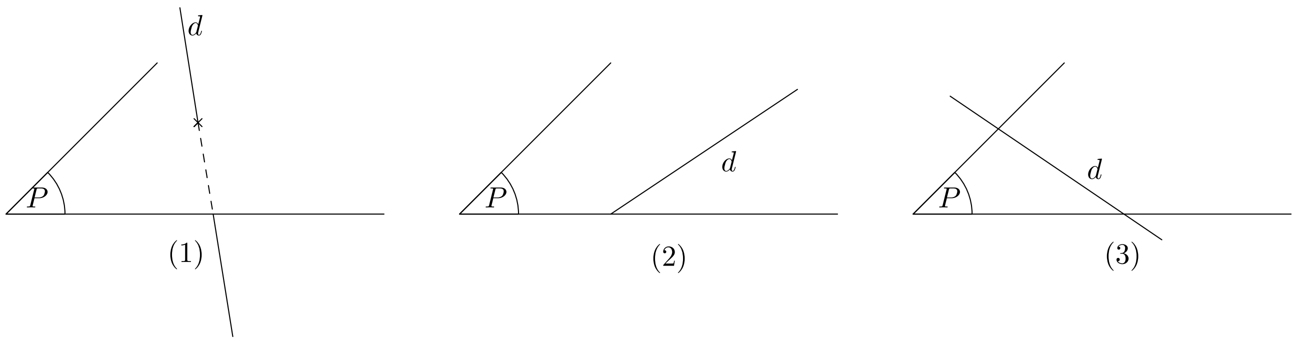
1. *Soit d une droite et un point C tel que $C \notin d$, alors il existe un unique plan passant par C et contenant d.*
2. *Si $\mathcal{P}$ est un plan, alors il existe trois points non alignés A, B, C tel que $\mathcal{P} = (ABC)$.*

Démonstration. En vertu du deuxième axiome, on peut prendre deux points distincts A, B sur d. Comme $C \notin d$, A, B et C ne sont pas alignés. Le troisième axiome nous assure alors qu'il existe un unique plan $\mathcal{P} = (ABC)$. Enfin, le quatrième axiome nous assure que $d = (AB)$ est contenu dans cet unique plan $\mathcal{P}$. Ceci montre les deux énoncés cherchés. $\square$

Application 2 (position relative d'un plan et d'une droite)

Proposition 1.15. *Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan, alors on a un des cas suivants :*

1. *d coupe $\mathcal{P}$ en un point.*
2. *$d \subset \mathcal{P}$.*
3. *$d \cap \mathcal{P} = \emptyset$.*



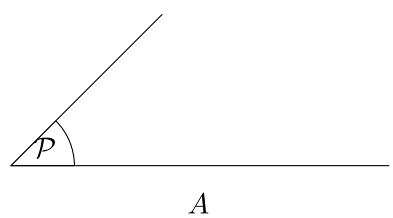
Démonstration. Si $d \cap \mathcal{P} = \emptyset$, on a la situation (3). Si $d \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ on a deux cas possibles :

- $d \cap \mathcal{P} = \{A\}$, donc on est dans la situation (1)
- d coupe $\mathcal{P}$ en au moins deux points distincts A et B. En vertu du quatrième axiome on obtient $d = (AB) \subseteq \mathcal{P}$, car $A, B \in \mathcal{P}$, on est donc dans la situation (2).

□

Finalement, il nous faut un dernier axiome pour s'assurer des trois dimensions de l'espace, car cette propriété ne découle pas des axiomes précédents.

Axiome V : Il existe toujours un point de l'espace non contenu dans un plan donné.



Remarque. Ce cinquième axiome peut-être vu comme l'équivalent pour les plans de l'Axiome II concernant les droites.

Position relative de deux plans de l'espace

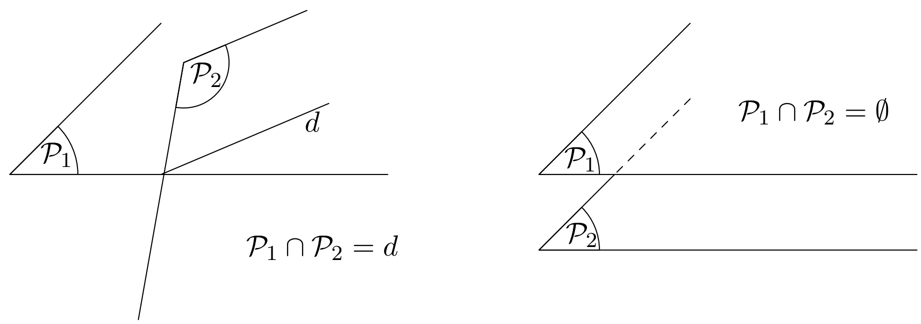
Nous avions conclu la partie sur les axiomes de droites par la position relative de deux droites dans l'espace que nous avions déduit des axiomes des droites. De façon surprenante, il n'est pas possible de faire la même chose pour les plans. Pourquoi ? Recommençons le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 1.13 [3].

Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont disjoints (c'est-à-dire $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$), soit ils ne le sont pas (c'est-à-dire $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$). Supposons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ contiennent au moins trois points A, B, C non alignés, alors en vertu du troisième axiome $\mathcal{P} = (ABC) = \mathcal{P}'$. Dans le cas où $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ ne contient que des points alignés, alors l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite en vertu du quatrème axiome. Mais que peut-on

3. on invite le lecteur à aller relire cette démonstration pour réaliser à quel pont ces deux raisonnements sont similaires.

déduire si $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \{A\}$ un unique point ? Souhaite-t'on que l'intersection de deux plans dans l'espace puisse être un point ? Et bien non, pas en géométrie euclidienne. La position relative de deux plans par contre ne peut se déduire des axiomes, il faut donc le poser en axiome.

Axiome VI : L'intersection de deux plans distincts est soit vide, soit une droite.



1.7 Droites coplanaires et parallélisme

Nous avions fait la remarque plus haut que deux droites de l'espace d'intersection vide ne sont pas forcément parallèles, pour cela nous allons devoir préciser la définition de droites parallèles.

1.7.1 Droites parallèles dans un plan

Définition. Ont dit que deux droites d'un même plan sont parallèles si elle ne se croisent pas ou si elles sont confondues.

Notation. Soit d et d' deux droites d'un plan. On note $d \cap d'$ l'ensemble des points d'intersection de d et d'. De plus,
- $d \parallel d'$ est la notation pour les droites d et d' sont parallèles.
- $(d \parallel d') \Leftrightarrow d \cap d' = \emptyset$ ou $d \cap d' = d$! Attention, ceci n'est plus vrai pour deux droites quelconques de l'espace, comme nous allons le voir dans la partie suivante.

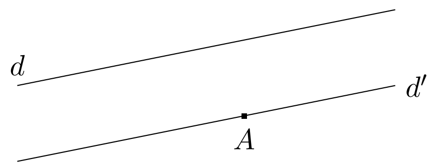
Proposition 1.16. *Soit d et d' deux droites d'un plan $\mathcal{P}$, il y a trois cas possibles :*
- *$d \parallel d'$: les deux droites sont parallèles ;*
- *$d \cap d' = \{A\}$ où A est un point : les droites sont sécantes (elles se coupent en un point).*

Démonstration. Cette proposition est une reformulation de la proposition 1.13. □

La question que nous devrions immanquablement nous poser est la suivante : existe-t'il une unique parallèle à une droite donnée passant par un point donné ? On ne peut pas répondre à cette question en géométrie sans poser le célèbre axiome d'Euclide.

1.7.2 Axiome d'Euclide et transitivité du parallélisme

Axiome d'Euclide (postulat des parallèles) : Soit d une droite et A un point qui n'est pas sur d. Soit $\mathcal{P}$ l'unique plan défini par d et A. Il *existe* une *unique* droite d' dans $\mathcal{P}$ passant pas A et parallèle à d.



Remarque. Les mathématiques ont longtemps essayé de démontrer cet axiome à partir des autres. C'est au XIX^{e} siècle que l'on a découvert des modèles d'≪autres géométries≫ ou le cinquième axiome d'Euclide n'est pas vérifié (ex : géométrie elliptique et hyperbolique). Cela révolutionna les mathématiques et par extension la physique (théorie de la relativité) et par extension...

La proposition qui suit, et en particulier le troisième point, est fortement liée au postulat d'Euclide. En d'autres termes, il existe des géométries dans lesquelles la transitivité du parallélisme n'est pas vérifiée.

Proposition 1.17. *La relation ≪être parallèle≫ dans le plan est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
Si d_1, d_2, d_3 sont trois droites d'un plan $\mathcal{P}$, on a
- $d_1 \parallel d_1$ *(symétrique).*
- $d_1 \parallel d_2 \Longrightarrow d_2 \parallel d_1$ *(réflexive).*
- $d_1 \parallel d_2$ *et* $d_2 \parallel d_3 \Longrightarrow d_1 \parallel d_3$ *(transitive).*

Démonstration. Le fait que la relation ≪être parallèle≫ est symétrique et réflexive suit immédiatement des définitions. Pour le fait qu'elle est transitive, voir exercice 1.14 (ce résultat nécessite l'axiome d'Euclide). □

1.7.3 Droites parallèles dans l'espace

Définition.

1. On dit que des points sont coplanaires s'ils sont contenus dans le même plan.
2. On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont contenues dans un même plan.
3. Deux droites sont parallèles si elles satisfont les deux conditions suivantes :
   - elles sont coplanaires.
   - elles sont parallèles dans l'unique plan qui les contient.

Remarque. 1. On déduit du troisième et du cinquième axiome la proposition suivante : dans l'espace, il existe toujours 4 points non coplanaires.

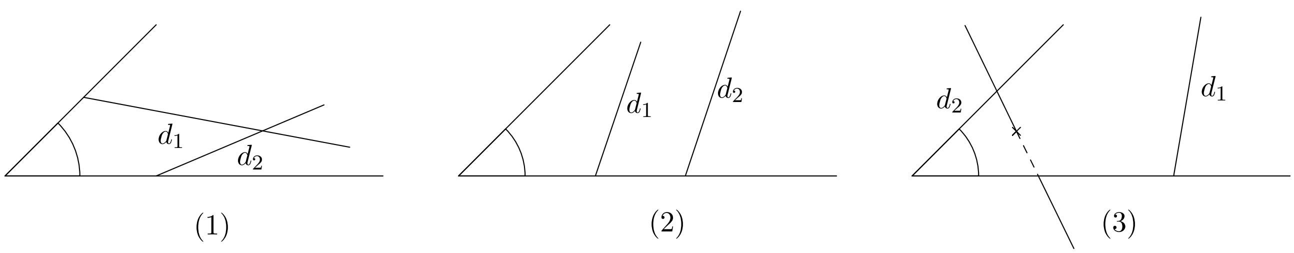
2. Deux droites non sécantes et non coplanaires ne sont pas parallèles.

3. Il existe un unique plan contenant deux droites parallèles distinctes (pourquoi ?).

On peut maintenant reformuler de manière plus précise la proposition 1.13

Proposition 1.18. *Soit d_1 et d_2 deux droites de l'espace, alors on a l'un des cas suivants :*

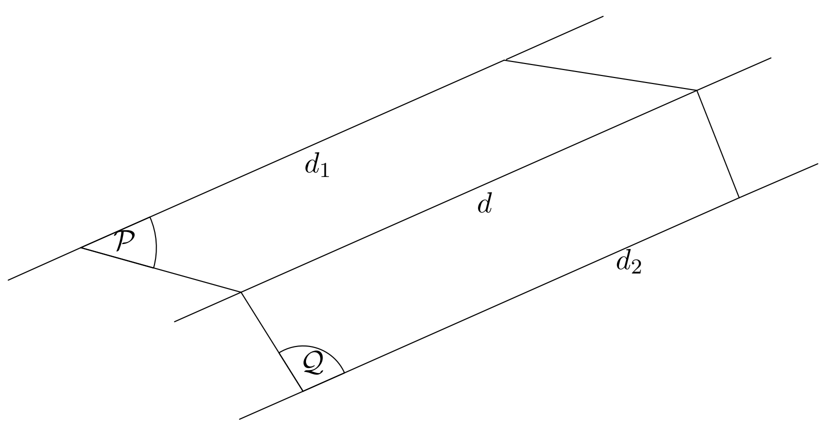
1. *d_1 et d_2 sont sécantes (et donc coplanaires) ;*
2. *$d_1 \parallel d_2$ (et donc coplanaires) ;*
3. *$d_1 \cap d_2 = \emptyset$ et ne sont pas coplanaires.*



(1) (2) (3)

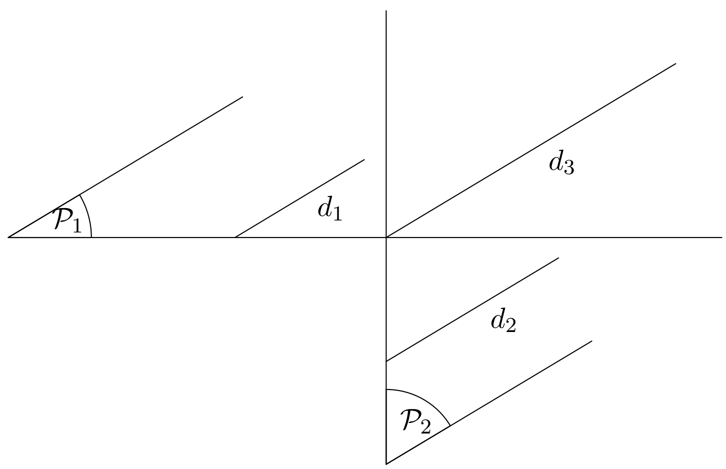
Nous voulons maintenant démontrer que la relation « être parallèle dans l'espace » pour les droites est une relation d'équivalence. Pour cela nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant.

Théorème 1.19 (du toit)**.** *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans sécants (donc distincts) et soit $d = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Si $d_1 \subseteq \mathcal{P}$ et $d_2 \subseteq \mathcal{Q}$ sont parallèles, alors $d \parallel d_1$ et $d \parallel d_2$.*



Démonstration. Supposons que d_1 coupe d en A. Montrons que l'on obtient une contradiction. Soit $\mathcal{R}$ le plan contenant d_1 et d_2 ($d_1 \parallel d_2$). Alors $A \in \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$, car $A \in d_1 \cap d \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$. Donc $\mathcal{R}$ est l'unique plan contenant d_2 et $A \in d$, ainsi $\mathcal{R} = \mathcal{Q}$. Donc d, d_1 et d_2 sont coplanaires et donc $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, ce qui est absurde, car par hypothèse ces deux plans sont sécants. On obtient donc que $d_1 \parallel d$. On procède de même pour d_2. □

Corollaire 1.20. *La relation ≪ être parallèle dans l'espace ≫ pour les droites est une relation d'équivalence, c'est-à-dire : si d_1, d_2, d_3 sont trois droites de $\mathcal{E}$, on a*
- $d_1 \parallel d_1$ *(symétrique).*
- $d_1 \parallel d_2 \Longrightarrow d_2 \parallel d_1$ *(réflexive).*
- $d_1 \parallel d_2$ *et* $d_2 \parallel d_3 \Longrightarrow d_1 \parallel d_3$ *(transitive).*



Preuve de la propriété de transitivité. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan contenant d_1 et $A \in d_3$ et soit $\mathcal{P}_2$ le plan contenant d_2 et $d_3(d_2 \parallel d_3)$. Par le théorème du toit, on obtient que $d' = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est parallèle à d_1 et à d_2, car $d_1 \parallel d_2$. Or,

$$\left.\begin{array}{c} d' \parallel d_2 \\ d_3 \parallel d_2 \\ A \in d_3 \cap d' \end{array}\right\} \Longrightarrow d_3 = d' \parallel d_1.$$

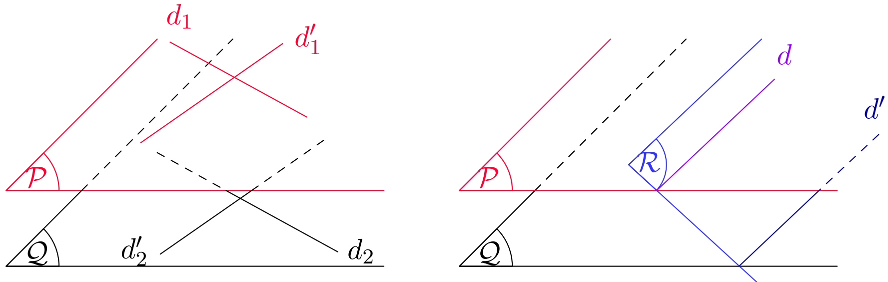
□

1.7.4 Plans parallèles

Définition. On dit que deux plans sont parallèles (noté $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$) s'ils sont égaux ou d'intersection vide.

Proposition 1.21. *Soit $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois plans alors :*
1. *Si deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes de $\mathcal{Q}$ alors $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$.*

2. *La relation « être parallèle dans l'espace » pour les plans est une relation d'équivalence, c'est-à-dire : si P_1, P_2, P_3 sont trois plans de $\mathcal{E}$, on a*
   – *$P_1 \parallel P_1$ (symétrique).*
   – *$P_1 \parallel P_2 \Longrightarrow P_2 \parallel P_1$ (réflexive).*
   – *$P_1 \parallel P_2$ et $P_2 \parallel P_3 \Longrightarrow P_1 \parallel P_3$ (transitive).*
3. *Si $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ coupe $\mathcal{P}$ en une droite d, alors $\mathcal{R}$ coupe $\mathcal{Q}$ en $d' \parallel d$.*



(1) (3)

Démonstration. 1. Supposons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, alors il existe une droite $d \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ (On va montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$). Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{P}$ alors $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, si $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = d$, on va montrer que c'est absurde. Posons d_1 et d'_1 les deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ respectivement parallèles à d_2 et d'_2, les deux droites sécantes de $\mathcal{Q}$.

   Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants en d et que $d_1 \subseteq \mathcal{P}, d_2 \subseteq \mathcal{Q}$ et $d_1 \parallel d_2$, on a par le théorème du toit que $d \parallel d_1$ et $d \parallel d_2$. De même, on montre que $d \parallel d'_1$ et $d \parallel d'_2$. Par transitivité, on obtient que $d_1 \parallel d'_1$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq d$ et ainsi $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

2. Le fait que cette relation est réflexive et symétrique se déduit facilement de la définition. On suppose que $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux à deux distincts (sinon il n'y a rien à démontrer). Soit d et d' deux droites sécantes de $\mathcal{Q}$ et soit $A \in \mathcal{P}$, alors le plan contenant A et d coupe $\mathcal{P}$ en une droite $d_P \subseteq \mathcal{P}$. Donc d_P et d sont coplanaires. Comme $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ ($\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$), on a $d_P \cap d = \emptyset$, car $d_P \subseteq \mathcal{P}$ et $d \subseteq \mathcal{Q}$. Donc $d_p \parallel d$. La relation est donc aussi transitive, c'est une relation d'équivalence.

   De même, on construit la droite $d'_p \parallel d', d'_P \subseteq \mathcal{P}$. Comme d et d' sont sécantes, d_P et d'_P le sont aussi (à vérifier).

   Procédant de même, on construit deux droites sécantes dans $\mathcal{R}$, d_R et d'_R tel que $d_R \parallel d$ et $d'_R \parallel d'$. Par transitivité des droites parallèles dans l'espace et par (1), on obtient donc que $\mathcal{P} \parallel \mathcal{R}$.

3. Supposons $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$, on a donc que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Si $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{R} \parallel \mathcal{Q}$. Donc, $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$, car $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$ par (2). Or $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = d$ ce qui, par contradiction, entraine que $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ et $\mathcal{R} \neq \mathcal{Q}$. Donc $\mathcal{R}$ coupe $\mathcal{Q}$ en une droite $d' \subseteq \mathcal{Q}$. Comme $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, $d' \subseteq \mathcal{Q}$ et $d \subseteq \mathcal{P}$, on a que $d \cap d' = \emptyset$. Or $d, d' \subseteq \mathcal{R}$ sont coplanaires, donc $d \parallel d'$.

□

Contrairement au cas des droites, l'unicité d'une parallèle à un plan donné passant par une droite donné ne nécessite pas de nouvel axiome.

Corollaire 1.22. *Soit $\mathcal{P}$ un plan et $A \notin \mathcal{P}$, il existe un unique plan $\mathcal{Q}$ passant par A et parallèle à $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux plans tels que $\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P}$ et $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = d$. Alors par (3) on a que $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = d'$ une droite, ce qui contredit $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$. Donc $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \neq d \Longrightarrow \mathcal{Q} = \mathcal{R}$ (car $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$). □

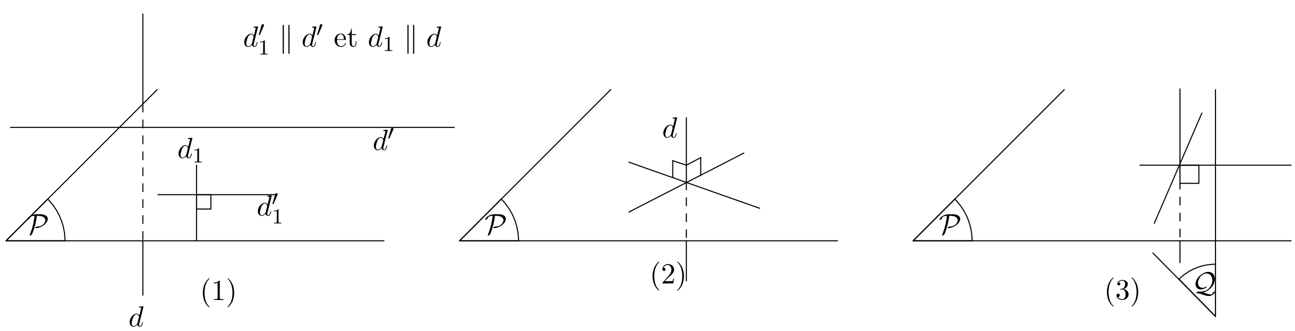
1.8 Orthogonalité dans l'espace

1.8.1 Droites orthogonales et plans perpendiculaires

Avant de conclure ce chapitre, nous allons passer en revue les définitions et certains des résultats les plus utiles concernant la notion d'orthogonalité dans l'espace. Ces notions s'appuient sur la notion d'angle dont nous n'exposerons les principes précis que dans le chapitre **??**. On invite le lecteur à penser à démontrer ces résultats dans le but de parfaire la compréhension de la différence entre axiomes et propositions démontrables.

Définition.

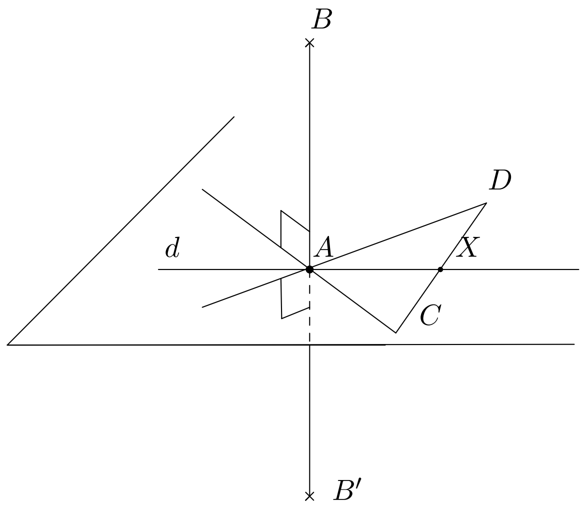
1. Deux droites d et d' sont dites orthogonales si elles sont parallèles à deux droites perpendiculaires (i.e à deux droites qui se coupent en angle droit). Notation : $d \perp d'$.
2. Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si d est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$. Notation : $d \perp \mathcal{P}$.
3. Deux plans sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre plan. Notation : $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q}$.



Proposition 1.23. *Si $d \parallel d'$ et $d \perp d''$ alors $d' \perp d''$*

Démonstration. Voir exercice 1.13. □

Théorème 1.24. *Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.*



Idée de la preuve. Donnée : $(B'B) \perp (AD)$ et $(BB') \perp (AC)$. Est-ce que $(BB') \perp d$? On choisit B, B' tels que A milieu de $[BB']$ et on choisit X tel que $\{X\} = (DC) \cap d$. Par hypothèse (AC) est la médiatrice de $[BB']$ dans le plan (ABC), donc $BC = B'C$. De même, $BD = B'D$.

$\Longrightarrow BDC$ et $B'DC$ sont des triangles isométriques.

$\Longrightarrow \widehat{BCD} = \widehat{B'CD}$ et $BC = B'C$ et $CX = CX$.

$\Longrightarrow B'CX$ et BCX sont des triangles isométriques.

$\Longrightarrow BX = B'X$.

$\Longrightarrow X$ est sur la médiatrice de $[BB']$ dans le plan (BB'X).

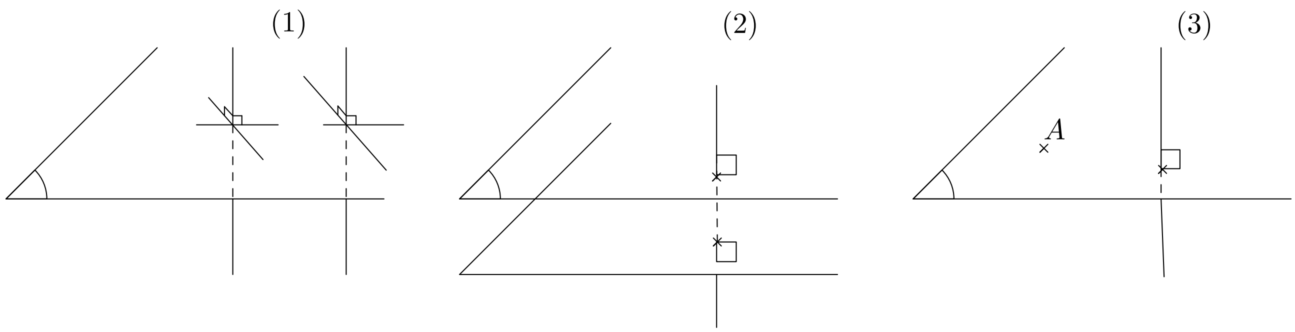
$\Longrightarrow d = (AX) \perp (BB')$.

La suite de la preuve est laissée en exercice. □

Corollaire 1.25.

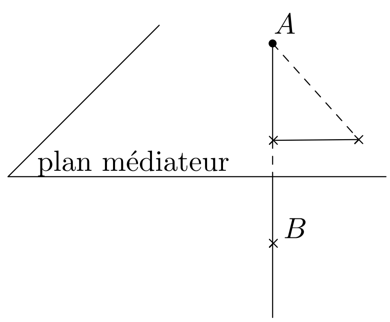
1. *Si deux droites sont parallèles, alors un plan orthogonal à l'une l'est aussi à l'autre.*
2. *Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonal à l'un l'est aussi à l'autre.*
3. *Par un point de l'espace, il ne passe qu'un unique plan orthogonal à une droite donnée.*

Démonstration. Voir exercice 1.15. □



On termine cette section en donnant la définition du plan médiateur, qui joue le rôle dans l'espace que la médiatrice jouait dans le plan.

DÉFINITION. Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.



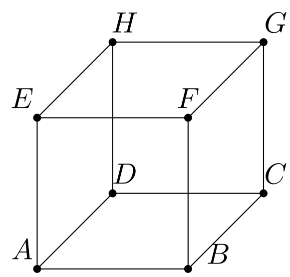
Proposition 1.26. *M est dans le plan médiateur de $[AB]$ $\iff$ $AM = BM$.*

Démonstration. Il suffit de noter que M est sur la médiatrice de $[AB]$ dans le plan (ABM). □

1.8.2 Application : le cube

Grâce aux quelques axiomes que nous nous sommes donnés et aux résultats que l'on en a déduit nous sommes capables de démontrer, de prédire, les propriétés bien connues du cube en partant de sa plus simple définition.

DÉFINITION. Un cube ABCDEFGH est un solide dont toutes les faces sont des carrés.



Proposition 1.27. *Le cube $ABCDEFGH$ a les propriétés suivantes :*

1. *les droites définies par les arêtes de faces opposées sont parallèles ;*
2. *les plans définis par les faces opposées sont parallèles ;*
3. *les droites définies par les arêtes de la face $ABCD$ sont orthogonales aux droites de la face $AEFB$;*
4. *les plans définis par des faces adjacentes sont perpendiculaires.*

Démonstration. 1. Montrons par exemple que $(AE) \parallel (CG)$. Comme $AEHD$ est un carré, $(AE) \parallel (HD)$. Comme $HDCG$ est un carré, $(HD) \parallel (CG)$. Par transitivité de la relation « être parallèle », on en déduit que $(AE) \parallel (CG)$. On procède de même pour toutes les autres arêtes.

2. Montrons par exemple que $(AEF) \parallel (DHG)$. On sait par (1) que les deux droites sécantes (AE) et (EF) sont respectivement parallèles aux deux droites sécantes (DH) et (HG). En vertu de la proposition 1.21 (1) on en déduit que $(AEF) \parallel (DHG)$.

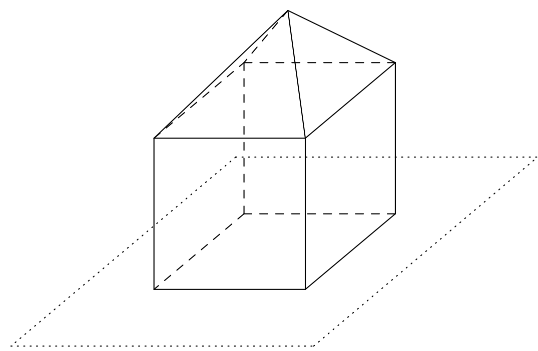
3. Montrons par exemple que $(AE) \parallel (CD)$. Comme $AEHD$ est un carré, $(AE) \parallel (HD)$. Comme $HDCG$ est un carré, $(HD) \perp (CD)$. Par définition on obtient bien que $(AE) \parallel (CD)$. On procède de même pour toutes les autres arêtes.

4. Montrons par exemple que $(AEF) \parallel (ABC)$. Comme (AEF) contient la droite (AE) qui est perpendiculaire aux droites sécantes (AB) et (AD), on déduit du théorème 1.24 que $(AE) \perp (ABC)$ et donc que $(AEF) \parallel (ABC)$.

□

1.9 Réponse au problème de l'architecte

Après quelques jours de réflexion, notre architecte revint voir le riche citoyen d'Athènes et lui remis le plan ci-dessous :



Il commença alors à lui expliquer comment, avec seule une corde et le bout de bois d'un mètre, il pouvait donner des indications aux ouvriers pour construire un cube parfait de 7 mètres de coté, à partir de la construction de six carrés parfait de 7 mètres de coté. Le riche citoyen d'Athènes, étant lui-même un peu versé dans l'art de la géométrie développé par la jeune école pythagoricienne, acquiesça. Puis il expliqua une construction pour des triangles équilatéraux de 7 mètres de coté destinés à devenir le toit. Le riche citoyen acquiesça encore. Alors l'architecte lui expliqua comment, avec l'aide des théorèmes de Thalès et Pythagore il lui est possible de parfaitement placer la clôture dont la longueur mesurera la hauteur de la pyramide multipliée par la longueur de la diagonale d'un mur.

≪Ha ! ha !≫ s'écrira le riche citoyen d'Athènes, ≪voici ce qu'il me manquait ! ≫. Il continua : ≪Bravo grand architecte, tu m'as convaincu, mais avant de te donner le contrat, répond à la question suivante. Quelle sera exactement la longueur de ma clôture ?≫. L'architecte lui répondu rapidement : ≪la longueur de la diagonale au carré, soit 49 mètres, ô illustre citoyen≫. Le citoyen lui confia alors la réalisation de sa demeure qui fût longtemps connu comme une des plus parfaite d'Athènes.

Nous invitons le lecteur qui se demanderait pourquoi la clôture mesure 98 mètres de long de faire l'exercice 1.26.

1.10 Exercices du chapitre 1

Quelques résultats classiques

Exercice 1.1 Montrer qu'un quadrilatère convexe est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 1.2 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(i) $ABCD$ est un rectangle (i.e. un de ses angles est droit)

(ii) Tous ses angles sont droits.

(iii) Ses diagonales ont même longueur.

Exercice 1.3 Montrer que la somme des angles d'un parallélogramme convexe est 0.

Exercice 1.4 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O'. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en A et B (voir exercice 5). On note E le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}$ et F le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}'$. Montrer que A, E et F sont alignés.

Exercice 1.5 **(Examen 2009)** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centre respectifs O et O' et de rayon r et r'. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en deux points distincts A et B. Montrer que $(OO') \perp (AB)$.

Construction à la règle et au compas

Exercice 1.6 Donnez, tout en justifiant, la construction à la règle et au compas des objets suivants :

1. Le centre d'un cercle donné.
2. La tangente au point P d'un cercle donné. On rappelle que la tangente à un cercle en P est la droite perpendiculaire à (OP) passant par P (O étant le centre du cercle).
3. Les deux tangentes à un cercle donné passant par un point P à l'extérieur de ce cercle.
4. Un segment de longueur le quotient de deux nombres constructibles (division).
5. Diviser en cinq parties d'égales longueurs un segment donné.
6. Un segment de longueur $\sqrt{3}$, puis $\sqrt{4}$, puis $\sqrt{5}$ et puis $\sqrt{7}$. En déduire un procédé pour $\sqrt{n}$.
7. Un triangle rectangle isocèle en C dont on connait l'hypothénus AB.

Triangles, droites et points remarquables

Exercice 1.7 Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles distincts. Montrer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ est soit vide (ils sont *disjoints*), soit un point (ils sont *tangents*) ou soit deux points (ils sont *sécants*).

Exercice 1.8 Soient O_1, O_2 et O_3 trois points distincts non alignés, et soit $r > 0$. Soit $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, 3$) le cercle de centre O_i et de rayon r. On suppose que ces cercles sont sécants 2 à 2 (voir exercice 5). On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$; C et D les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$; E et F les points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

1. Montrer que (AB) est la médiatrice de $[O_1 O_2]$.
2. En déduire que les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes.

Exercice 1.9 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E le symétrique de A par rapport à C (c'est à dire le point de la droite (AC) tel que C est milieu de $[A\,E]$). Quel est le centre de gravité du triangle DEB ?

Exercice 1.10 Soit d une droite et E qui n'est pas sur d. Le *projeté orthogonal* de E sur d est le point d'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par E.

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AD) et K le projeté orthogonal de D sur (AC).

1. Montrer que (CH) et (DK) se coupent en un point I.
2. Montrer que (AI) est perpendiculaire à (AB).

Exercice 1.11 Soit $ABCD$ un rectangle. La médiatrice de $[AC]$ coupe (AB) en I et (BC) en J. Montrer que (CI) est perpendiculaire à (AJ).

Exercice 1.12 On considère un triangle ABC. Le but de cet exercice est de montrer que les bissectrices de ABC sont concourantes. On rappelle que

* la bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux ;

* La distance d'un point M à une droite d est la longueur du segment $[MI]$ où I est l'intersection entre d et la perpendiculaire à d passant par M.

1. Montrer que d_A est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ si et seulement si pour tout point $M \in d_A$, la distance de M à (AB) est égale à la distance de M à (AC).
2. Montrer que les bissectrices de ABC sont concourantes.
3. Construire les bissectrices de ABC à la règle et au compas (justifier la construction).

Exercice 1.13 (Médianes et centre de gravité) Soit ABC un triangle, le but de cet exercice est de montrer que les médianes de ABC sont concourantes en le centre de gravité G. De plus G se situe au $2/3$ de chaque médiane à partir du sommet correspondant.

Soit A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. Les médianes sont donc les droites (AA'), (BB') et (CC'). Posons maintenant A_1 (respectivement B_1 et C_1) le symétrique de G par rapport à A' (respectivement B' et C'). Soit G le point d'intersection de (AA') et (BB').

1. Faire un dessin de la situation.
2. Montrer que A_1BGC, AB_1CG et $BGAC_1$ sont des parallélogrammes.
3. Montrer que ABA_1B_1 est un parallélogramme.
4. Montrer que G est le milieu de $[A_1 A]$.
5. Montrer que ACA_1C_1 est un parallélogramme et que G est le milieu de $[C C_1]$. En déduire que (AA'), (BB') et (CC') se coupent en G.
6. Montrer que $AG = \frac{2}{3}AA'$, $BG = \frac{2}{3}BB'$ et $CG = \frac{2}{3}CC'$.

Exercice 1.14 (Examen 2009) On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O (l'intersection des diagonales) et I l'orthocentre du triangle OBC.

1. Montrer que les droites (OI) et (BC) son perpendiculaires.

2. Soit K l'orthocentre du triangle OAD.
   (a) Montrer que les points K, O et I sont alignés.
   (b) Montrer que (AK) et (IC) sont parallèles.
   (c) Montrer que $OK = OI$.
   (d) En déduire que O est le milieu de $[IK]$.
3. Soient les points J et L, orthocentres respectifs des triangles OCD et AOB. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$.

Exercice 1.15 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. Soit I milieu de $[AB]$, J milieu de $[BC]$, K milieu de $[CD]$ et L milieu de $[AD]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 1.16 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[IJ]$. On note $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre $[OI]$. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ différent de I et J . La droite (MI) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en S et la droite (MO) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en T. La droite perpendiculaire à (IJ) passant par M coupe la droite (IT) en P .

1. Faire un dessin de la situation.
2. Montrer que (OP) est une hauteur du triangle IPM.
3. Déduire de la question précédente que les points P, O et S sont alignés.
4. En utilisant la réciproque du théorème de Thalès, démontrer que S est le milieu du segment $[IM]$.
5. Quelle est la nature du triangle IPM ? Justifier votre réponse.

Exercice 1.17 (Examen 2010) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centre respectifs O et O' et de rayon r et r'. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en deux points distincts A et B. Montrer que $(OO') \perp (AB)$.

Exercice 1.18 (Examen 2010) On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O (l'intersection des diagonales) et I l'orthocentre du triangle OBC.

1. Montrer que les droites (OI) et (BC) son perpendiculaires.
2. Soit K l'orthocentre du triangle OAD.
   (a) Montrer que les points K, O et I sont alignés.
   (b) Montrer que (AK) et (IC) sont parallèles.
   (c) Montrer que $OK = OI$.
   (d) En déduire que O est le milieu de $[IK]$.
3. Soient les points J et L, orthocentres respectifs des triangles OCD et AOB. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$.

Axiomes de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace

Exercice 1.19 Soit d, d', d'' trois droites distinctes de l'espace, montrer que

1. Si $d \perp d'$ et $d' \parallel d''$ alors $d \perp d''$.
2. Si $d \perp d'$, $d' \perp d''$ et si d et d'' sont coplanaires, alors $d \parallel d''$.

Exercice 1.20 Soient d, d' et d'' trois droites distincts d'un même plan.

1. Montrer que si d et d' parallèles et si d'' coupe d, alors d'' coupe aussi d'.
2. Montrer que si $d \parallel d'$ et $d' \parallel d''$ alors $d \parallel d''$ (la relation $\parallel$ est *transitive*).

Exercice 1.21 Démontrer les propositions suivantes :

1. Si deux droites sont parallèles, alors un plan orthogonal à l'une l'est aussi à l'autre.
2. Si deux plans sont parallèles, alors une droite orthogonal à l'un l'est aussi à l'autre.
3. Par un point de l'espace, il ne passe qu'un unique plan orthogonal à une droite donnée.
4. Par un point de l'espace, il passe une et une seule droite orthogonale à un plan donné.
5. Soit P_1 et P_2 des plans perpendiculaires, alors P_1 et P_2 sont sécants.
6. Soit P_1, P_2 et P_3 trois plans tels que $P_1 \cap P_2 = d$ une droite, et $P_1 \perp P_3$ et $P_2 \perp P_3$, alors d est orthogonale à P_3.
7. Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

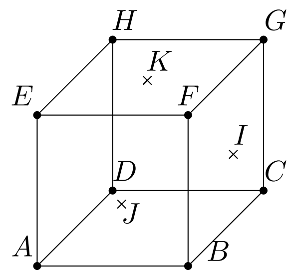
Géométrie dans l'espace

Exercice 1.22 Soit $ABCDEFGH$ un cube (un solide dont les faces sont toutes des carrés de même coté et tel que les faces opposées soient parallèles).

1. Montrer que les faces adjacentes sont perpendiculaires.
2. Montrer que $ABGH$ est un rectangle. Calculer AG en fonction de AB.
3. Montrer que $[AG]$ et $[BH]$ se coupent en leur milieu. Notons ce milieu O.
4. Les diagonales d'un cube sont-elles perpendiculaires ?

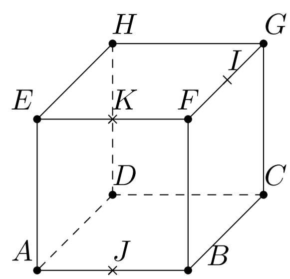
Exercice 1.23 On considère un cube $ABCDEFGH$, où les points I, J et K sont les centres respectifs des faces $(BCGF), (ABEF)$ et $(EFGH)$.

1. Quelle est la nature du triangle IJK ? (Justifiez)
2. Démontrer que F est équidistants des points I, J et K.
3. Démontrer que D est équidistants des points I, J et K.
4. En déduire que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).



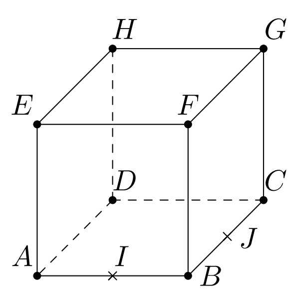
Exercice 1.24 On considère un cube $ABCDEFGH$, où les points I, J et K sont les milieux respectifs de $[FG], [AB]$ et $[DH]$.

1. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (IJK).
2. Démontrer que IJK est un triangle équilatéral.



Exercice 1.25 Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

1. Quelle est la droite parallèle à (HF) passant par B.
2. Donner le tracer de la droite parallèle à (EG) passant par I. (en justifiant)
3. (IJ) et (EG) sont-elles parallèles ?



Exercice 1.26 Soit ABCDE une pyramide de base ABCD et dont tous les côtés sont de longueur 7 mètres. Soit O l'intersection des diagonales du carré $ABCD$, la hauteur de la pyramide est la longueur

du segment $[OE]$. Calculer la hauteur de la pyramide. En déduire que la hauteur de la pyramide multipliée par la longueur de la diagonal de la base est égale à 49 mètres.

Exercice 1.27 Soit SABC un tétraèdre. La droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) et le triangle ABC est rectangle en B.

1. Le but de cette question est de montrer que SBC est rectangle en B.
   (a) Démontrer que (BC) et (SA) sont orthogonales.
   (b) Démontrer que le triangle SBC est rectangle en B.
2. H est un point de l'arête $[AB]$; on trace par H le plan orthogonal à (AB). On suppose que ce plan coupe (AC) en I, (SC) en J et (SB) en K.
   (a) Démontrer que les droites (HI) et (BC) sont parallèles.
   (b) En déduire que les droites (HI) et (KJ) sont parallèles.
   (c) Démontrer que les droites (KH) et (SA) sont parallèles.
   (d) En déduire que les droites (HK) et (IJ) sont parallèles.
   (e) Démontrer que HIJK est un rectangle.
3. On suppose à présent que $AB = 1$ et que $SA = BC = 2$. On pose $AH = x$.
   (a) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, que $HI = 2x$.
   (b) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle SAB, que $HK = 2(1–x)$.
   (c) Calculer l'aire du rectangle HIJK en fonction de x. On note $A(x)$ cette aire.
4. Le but de cette question est de déterminer la nature de HIJK.
   (a) Démontrer que $4x(1–x) = 1–(1–2x)^2$.
   (b) Pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est-elle maximale ?
   (c) Quelle est alors la position du point H sur $[AB]$.
   (d) Quelle est alors la nature du quadrilatère HIJK ?

Annexe A

Introduction au raisonnement et au langage mathématique

Ce chapitre est destiné à être lu et discuté lors d'une séance en classe. Il est aussi le chapitre auquel le lecteur devrait se référer au cours de la lecture de ce texte s'il veut se rafraichir la mémoire au sujet des bases du langage et du raisonnement mathématique.

A.1 Écrire les mathématiques

Le but premier d'un langage est de permettre la communication entre individus. Le langage mathématique n'échappe pas à cette règle. Nous allons passer en revue dans cette partie les bases du langage et du raisonnement mathématique. Nous allons illuster nos propos à l'aide de trois ≪ devinettes ≫ tirées du livre fascinant de R. Smullyan : *Le livre qui rend fou* [Smullyan 1997].

Devinette A.1. *Vous payez 20$ une bouteille de Shiraz. Le vin coûte 19$ de plus que la bouteille. Combien vaut la bouteille ?*

On structurera généralement dans un texte mathématique la réponse comme suit :

Réponse : La bouteille vaut 50 sous.

Démonstration (aussi appelée preuve*).* Le vin coûte 19$ plus le prix de la bouteille (c'est une des hypothèses de départ). Si on y ajoute le prix de la bouteille, on obtient le prix de la bouteille de Shiraz, soit 20$ (seconde hypothèse de départ réécrite). Donc le prix total, soit 20$, est composé de 19$ et de deux fois le prix de la bouteille (déduction logique par ≪ implication ≫). D'où la bouteille vaut la moitié de 1$, soit 50 sous (dernière implication et conclusion). □

Ainsi pour répondre correctement à une question (mathématique ou non d'ailleurs), on a besoin d'énoncer clairement la question, puis sa réponse : c'est *l'introduction*; puis on rédige clairement la preuve de ce que l'on vient d'affirmer : *c'est le plan et développement du plan.* C'est dans cette dernière partie que l'on utilise *un raisonnement* (qui dans l'exemple se compose ≪ d'implications ≫).

En mathématiques, on travaille avec des propositions – aussi appelées assertions, ou énoncés – qui sont les phrases mathématiques, le tout structuré dans un texte que l'on appelle la preuve ou l'argument. Le tout est lié par le raisonnement. On distinguera dans les pages qui suivent les différents types d'énoncé, puis les différents moyens de montrer une proposition par un raisonnement.

Notre exposé se veut le plus informel possible. L'étude formelle du langage mathématique est l'objet du cours de logique.

A.1.1 Énoncé

Une phrase ayant pour but de définir des objets mathématiques, d'en affirmer les propriétés ou de les introduire, s'appelle un *énoncé.*

Il y a trois types d'énoncés. Un énoncé qui définit un nouvel objet est une *définition.* Par exemple : soit x un nombre réel, le plus grand des nombres x et $-x$ s'appelle la valeur absolue de x. Un énoncé qui désigne un objet par un symbole est une *notation.* Par exemple : notons $|x|$ la valeur absolue du réel x. Finalement, un énoncé qui affirme une propriété est une *proposition.* Par exemple : la valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive. On en arrive à la règle qui va guider tout raisonnement mathématique.

Règle. *Une proposition est soit fausse, soit vraie mais pas les deux à la fois !*

Par exemple la proposition $-1 > 0$ est fausse tandis que la proposition $-1 < 0$ est vraie. En mathématiques, on énonce généralement les propositions qui sont vraies. Si une proposition est fausse, on énonce sa négation.

A.1.2 Négation

Pour développer notre intuition, nous allons considérer aussi des énoncés en langage usuel, comme : tous les hommes sont mortels. Ceci posé, la négation de cette proposition est ≪ il existe au moins un homme qui est immortel ≫. Si P est une proposition, on note $\mathrm{non}(P)$ sa négation. Il est claire que $\mathrm{non}(\mathrm{non}(P)) = P$.

Attention : la négation, ou contraire, de ≪ ce tableau est noir ≫ est ≪ ce tableau n'est pas noir ≫. Ce n'est pas ≪ ce tableau est blanc ≫.

A.1.3 Opération ≪ ou ≫ et ≪ et ≫ sur les propositions

Soit P et Q deux propositions. La proposition ≪ P *ou* Q est vraie ≫ veut dire qu'au moins l'une des deux propositions est vraie. Autrement dit, les propositions P et Q ne peuvent pas être toutes les deux fausses. La proposition ≪ P *et* Q ≫ est vraie veut dire que les deux propositions sont vraies en même temps.

A.1.4 Implication et équivalence

Soit P et Q deux propositions. La nouvelle proposition « si P, alors Q » exprime que si P est vraie alors Q est vraie. C'est *l'implication.* On la note par le symbole $\Longrightarrow$.

Exemple. Soit x un nombre réel. Alors $x > 0 \Longrightarrow x \geq 0$. **Attention**, le contraire n'est pas vrai (car x peut prendre la valeur 0).

La nouvelle proposition « P si et seulement si Q » exprime que P est vraie si et seulement si Q est vraie. C'est *l'équivalence.* On la note par le symbole $\iff$.

Exemple. Une proposition P est vraie si et seulement si sa négation non(P) est fausse.

Dans la pratique, pour montrer $P \iff Q$, on montre $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.

Réecriture de la preuve de la Devinette A.1

On va illustrer ce que l'on vient de voir en reprenant la preuve de la première devinette. On rappelle que la réponse était 50 sous.

Commençons par deux énoncés (notations) :

Soit b le prix de la bouteille, et soit v le prix du vin.

Continuons par une succession d'implications pour confirmer notre réponse :

Par hypothèse on a :

$$\begin{array}{rcl} 20 & = b + v \quad \text{et} \quad v = 19 + b & \\ \Longrightarrow 20 & = & 19 + 2b \\ \Longrightarrow b & = & 0,5 \end{array}$$

A.1.5 Raisonnement, ou comment démontre-t-on une implication $P \Longrightarrow Q$?

Le raisonnement direct

La plupart du temps, on fait comme suit : on suppose comme hypothèse de départ que P est vrai ; puis, par une suite d'arguments, une suite d'implications, qui dépendent du problème particulier (et pour lesquels il est impossible de donner une recette générale), on montre que Q est vrai.

Le raisonnement indirect

On peut aussi démontrer sa contraposée : la contraposée de $P \Longrightarrow Q$ est non(Q) $\Longrightarrow$ non(P). En effet, une implication et sa contraposée sont toujours équivalentes ; démontrer l'une revient à démontrer l'autre, et vice-versa. Un exemple : on considère P la proposition « x est pair » et Q la proposition « x n'est pas le carré d'un entier pair ». Pour montrer $P \Longrightarrow Q$, c'est-à-dire x pair $\Longrightarrow x$ n'est pas le carré d'un entier pair, on montrera *non*(P)$\Longrightarrow$ non(Q), c'est-à-dire : $x = n^2$ et n impair $\Longrightarrow x$ impair.

Le raisonnement par l'absurde (aussi appelé raisonnement par contradiction)

Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ on peut aussi supposer *par l'absurde* que si P et non(Q) sont vraies, alors forcément non(P) est aussi vraie. Ceci est absurde en vertu de notre règle qui dit que soit P est vraie, soit non(P) est vraie. Donc Q est vraie et : $P \Longrightarrow Q$.

Voici un exemple de ce raisonnement.

Devinette A.2 ([Smullyan 1997])**.** *Cent hommes politiques se réunissent pour fonder un nouveau parti. Chacun d'eux est soit honnète, soit malhonnète.*

Sachant que parmi eux il y a au moins un homme honnète (proposition P_1), et que, si l'on en prend deux au hasard il y en a toujours au moins un malhonnête (Proposition P_2), pouvez-vous dire combien d'hommes politiques honnêtes il y a ?

Réponse : Il y a un homme politique honnête et 99 malhonnêtes.

Démonstration. Ici la proposition Q sera : il y a 1 homme politique honnête. En vertu de P_1, la proposition non(Q) est : il y a au moins deux hommes politiques honnêtes.

Procédons par contradiction. Supposons que Q est fausse, c'est-à-dire que non(Q) est vraie.

Alors, il existe au moins une paire d'hommes politiques honnêtes. Donc non(P_2) est vraie, ce qui est une contradiction de l'hypothèse de départ (P_2 est vraie).

D'où non(Q) est fausse, autrement dit, Q est vraie. □

On voit dans cette preuve que l'on a aussi utilisé des implications. En fait il est courant que les différents types de raisonnements s'entremêlent dans une preuve.

Le raisonnement cas par cas

Ce type de raisonnement se définit mieux par l'exemple.

Exemple ([Smullyan 1997, Chapitre 3]). « À la suite de certaines rumeurs, on envoya d'urgence l'inspecteur Craig afin d'enquêter dans onze asiles d'aliénés où avaient cours, disait-on, des pratiques curieuses.

Dans chacun d'eux ne logeaient que des médecins et leurs patients, mais les médecins, tout comme les patients, étaient parfaitement sains d'esprit, ou complètement fous. On distinguait les individus sains d'esprit à ce qu'ils raisonnaient fort bien et faisaient parfaitement la différence entre le vrai et le faux. Les fous aussi étaient faciles à reconnaître : ils croyaient systématiquement fausse toute affirmation vraie, et toute affirmation fausse leur semblait vraie. Je dois ajouter que ce petit monde était sincère, car chacun n'affirmait que ce qui lui semblait être vrai ».

Devinette A.3 (Le premier asile)**.** « *Dans le premier asile Craig n'interrogea que deux personnes.*

– Dîtes-moi, Durand, fit-il à la première, que savez vous de Dupont ?

– Le Docteur Dupont, rectifia l'autre, c'est l'un de nos médecins.

Ensuite Craig rencontra Dupont à qui il demanda :

– D'après-vous, Durand est-il un patient ou un médecin ?
– Un patient, je suis formel !
L'inspecteur Craig réfléchit un moment et arriva à la conclusion qu'il y avait en effet quelque chose d'anormal dans cet asile, car il abritait un patient sain d'esprit ou un médecin fou !
Comment est-il parvenu à cette conclusion ? »

Il nous faut donc montrer qu'il y a un médecin fou ou un patient sain d'esprit.

Démonstration. On va procéder par un raisonnement cas par cas. Il y a 4 cas possibles pour la condition de Durand : il est un médecin fou, ou un médecin sain d'esprit, ou encore un patient fou ou finalement un patient sain d'esprit. Si Durand est un médecin fou ou un patient sain d'esprit, on a automatiquement notre réponse. Il ne reste donc que deux cas.
1er cas : Durand est un médecin sain d'esprit. Donc il dit la vérité. D'où Dupont est un médecin. Mais comme Dupont dit que Durand est un patient, l'affirmation de Dupont est fausse, et donc Dupont est fou. On a bien dans ce cas un médecin fou ou un patient sain d'esprit !
2ème cas : Durand est un patient fou. Son affirmation est donc fausse, d'où Dupont est un patient. Mais Dupont dit que Durand est un patient, ce qui est vrai, donc Dupont est sain d'esprit. On a donc encore un patient sain d'esprit ou un médecin fou. □

A.2 Le langage ensembliste

Sans développer complètement la théorie des ensembles, nous donnons les principaux éléments de ce langage et les notations utilisées. La notion d'ensemble est fondamentale en mathématiques. Les termes « groupement », « famille » ou « collection » donnent une intuition de cette notion.

A.2.1 Ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objet. Les objets qui composent un ensemble sont appelés *éléments* de cet ensemble.

Exemples. L'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des droites dans un plan, l'ensemble des étudiants suivant le cours d'algèbre I. Il est clair que 4 n'est pas un élément de l'ensemble des nombres premiers, tandis que 3 l'est.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est, par définition, *l'ensemble vide* et on le représente par le symbole $\emptyset$.

Remarque. Il a été historiquement bien établi que l'imprécision de la définition d'un ensemble peut engendrer des paradoxes (voir par exemple le paradoxe de Russell dans tout bon livre de logique). Pour éviter cela, nous ne travaillerons qu'avec un petit nombre d'ensembles bien étudiés et stables. Toutes nos constructions découlerons en fait de l'ensemble vide et d'axiomes.

Ensembles fondamentaux

Ce sont les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les *entiers naturels* (i.e. $0, 1, 2, 3, \ldots$). C'est-à-dire que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont les *entiers relatifs* (i.e. $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$).

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les *nombres rationnels*. On rappelle qu'un nombre rationnel s'écrit a/b ou encore $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel différent de 0.

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les nombres réels (par exemple, π, $\sqrt{2}$ et les nombres rationnels).

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés les nombres complexes (par exemple, les nombres réels, les nombres imaginaires).

Il existe une construction formelle pour chacun de ces ensembles (qui n'est pas l'objet de ce cours mais de celui des cours de théorie des ensembles, d'algèbre, d'analyse et/ou de topologie).

Notation. On représente souvent les ensembles par des lettres majuscules et leurs éléments par des lettres minuscules.

Si x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$ et on lit x *appartient à* E ou x *est un élément de* E. Par exemple $456 \in \mathbb{N}$.

Si x n'est pas élément de E, on écrit $x \notin E$ et on lit x *n'appartient pas à* E ou x *n'est pas un élément de* E. Par exemple $-1 \notin \mathbb{N}$.

Décrire un ensemble

On peut décrire un ensemble de deux façons : ou bien on donne la liste de ses éléments, ou bien on donne une propriété qui caractérise ses éléments.

L'écriture $E = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ signifie que E est composé des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_m$; il peut y avoir des répétitions d'éléments : par exemple, $\{a, b, a\}$ représente le même ensemble que $\{a, b\}$. L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'importe pas : par exemple, $\{b, a\}$ représente le même ensemble que $\{a, b\}$.

Mais le plus souvent on se donne une propriété P pour définir un ensemble, comme par exemple : soit $A = \{x \in E \,|\, x \text{ possède } P\}$; cette notation signifie que A est l'ensemble des éléments de E qui possèdent la propriété P. Ainsi, on aura pour tout élément x de E : $x \in A$ si et seulement si x possède la propriété P. Autrement dit, si l'on veut montrer qu'un élément x de E est en fait dans A, il suffit de montrer que x a la propriété P. Et réciproquement, si $x \in E$ a la propriété P, il est dans A.

Exemples. $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geq 0\}$; $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Ensemble fini et infini

Définition. Un ensemble E est fini si on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que les éléments x_i soient tous distincts. Dans ce cas, on appelle le nombre n le *cardinal* de E et on le note : $n = |E|$.

Par convention $|\emptyset| = 0$.
Un ensemble E est infini si il n'est pas fini.

Exemple. $\{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 34\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ est fini, mais $\mathbb{N}$ est infini.

A.2.2 Sous-ensembles

Définitions

Soit A et E deux ensembles.

1. Si A et E sont constitués des mêmes éléments, on dit qu'ils sont égaux et on écrit $A = E$.
2. Si tous les éléments de A appartiennent à E, on dit que A est *contenu* dans E et on écrit $A \subseteq E$. Dans ce cas on dit que A *est un sous-ensemble* de E.
3. Le symbole $\subseteq$ est appelé *l'inclusion*.
4. Si A n'est pas un sous-ensemble de E, on écrit $A \nsubseteq E$.

Exemples. (1) $\emptyset$ et E sont des sous-ensembles particuliers de E ; un sous-ensemble autre que ceux-ci est un *sous-ensemble propre* de E. (2) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Ce qui signifie que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ etc. mais aussi que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$. On dit que l'inclusion est *transitive*.

Vocabulaire

On trouvera dans la littérature d'autres manières classiques de se référer à un sous-ensemble. Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On peut aussi écrire et dire que A *inclus* dans E, ou encore que A *une partie* de E. On trouvera, et on utilisera aussi, la notation suivante : $E \supseteq A$ (E contient A).

Attention, la notation $A \subset E$ peut signifier deux choses : **soit que** $A \subseteq E$, **soit que** $A \subseteq E$ et $A \neq E$. Dans ce cours, nous préciserons toujours si $A \neq E$.

Remarque. Tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.

L'ensemble des sous-ensembles

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble E :

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}.$$

Exemple. Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, E\}$.

Remarque. Si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$. La démonstration est difficile et nécessite plus d'outils que ceux présentés dans ce cours.

Démonstration de l'inclusion

Dans la pratique, quand on veut montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E, on doit montrer qu'un élément quelconque de A est forcément aussi un élément de E. Autrement dit que : $x \in A \Longrightarrow x \in E$.

De plus, pour montrer que $A = E$, on doit montrer que $A \subseteq E$ et $E \subseteq A$. Autrement dit que : $x \in A \iff x \in E$.

Complémentaire et différence

Si $A \subseteq E$, le *complémentaire* de A par rapport à l'ensemble E est l'ensemble formé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note A^c, et on lit A *complémentaire* lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur E. On a donc pour x élément de E : $x \in A^c \iff x \notin A$. En d'autres termes

$$A^c = \{x \in E \,|\, x \notin A\}.$$

La différence de deux ensembles A et B, notée $A \setminus B$ (lire A *moins* B), est le nouvel ensemble défini par

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}.$$

En particulier, si $A \subseteq E$ alors $A^c = E \setminus A$.

Exemple. Dans le cas d'un ensemble E qui contient 0, comme $\mathbb{N}, \mathbb{R}$, on écrit $E^* = E \setminus \{0\}$.

A.2.3 Produit cartésien

1. Un *couple* (a, b) est la donnée de a comme première coordonnée et b comme seconde coordonnée.
2. Si A et B sont des ensembles, le *produit cartésien* de A et B est l'ensemble

   $$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$$

   et se lit ≪ A croix B ≫.

   Exemples. (a) Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (b) Si $A = \{A, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$ et $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, alors le produit cartésien de ces deux ensembles est l'ensemble à 52 éléments suivant :

   $$\{(A, \spadesuit), (R, \spadesuit), \ldots, (2, \spadesuit), (A, \heartsuit), \ldots, (2, \heartsuit), (A, \diamondsuit), \ldots, (2, \diamondsuit), (A, \clubsuit), \ldots, (2, \clubsuit)\}.$$

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et E est un ensemble, le produit cartésien n fois de E est l'ensemble défini par récurrence

   $$E^n = E \times E^{n-1} \quad (= \underbrace{E \times E \times E \times \ldots \times E}_{n\ fois})$$

   dont les éléments sont appelés *n-uplets*.

Exemples. (a) L'espace $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (b) L'espace $\mathbb{R}^n$. (c) Le plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque. (a) $\emptyset \times E = E \times \emptyset = \emptyset$; en effet, il n'existe pas de couple (a, b) tel que $a \in E$ et $b \in \emptyset$!
(b) En général $A \times B \neq B \times A$; par exemple $\{(0,1),(1,1)\} = \{0,1\} \times \{1\} \neq \{1\} \times \{0,1\} = \{(1,0),(1,1)\}$.
(c) Il faut distinguer le *couple* (a, b), où l'ordre de a et b est important, de la *paire* $\{a, b\}$ qui est un ensemble, où l'ordre de a et b ne l'est pas. En général, les couples sont différents : $(a, b) \neq (b, a)$; mais pas les paires : $\{a, b\} = \{b, a\}$

A.2.4 Union et intersection

On appelle *réunion* ou *union de deux ensembles* A et B le nouvel ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B ou aux deux ; on le note $A \cup B$ et on lit « A union B ». Donc

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemple. $\{1, 3, -2, \pi\} \cup \{\pi, \sqrt{2}, 10, 11\} = \{1, 3, -2, \pi, \sqrt{2}, 10, 11\}$.

On appelle *intersection de deux ensembles* A et B le nouvel ensemble formé des éléments communs à A **et** B ; on le note $A \cap B$ et on lit « A inter B ». Donc

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemples. $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$.

Remarque. (a) $A \subseteq A \cup B$; (b) $A \cap B$ est un sous-ensemble de A, de B et de $A \cup B$.
(c) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$ (exercice).

Définition. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*, sinon on dit que A et B *se coupent*.

Exemple. **Nombres pairs et impairs**
L'ensemble *des nombres pairs* est noté $2\mathbb{Z}$ et celui des *nombres impairs* est

$$\mathcal{I} = \{2k + 1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors on a $2\mathbb{Z} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ et $2\mathbb{Z} \cup \mathcal{I} = \mathbb{Z}$. En français cela veut dire qu'un nombre entier est soit pair, soit impair, mais pas les deux à la fois !

On dit en mathématique que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une *partition* de $\mathbb{Z}$.

Compatibilités entre union, intersection et complément

On va donner ici les propriétés algébriques fondamentales des ensembles, propriétés qui vont nous permettre de « calculer » avec les ensembles.

Théorème A.1. *Soit A, B, C trois ensembles, alors*

1. $A \cap A = A$ *et* $A \cup A = A$ *(idempotence) ;*
2. $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité) ;*
3. $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$ *; et si* $A \subseteq B$ *alors* $A \cup B = B$ *et* $A \cap B = A$ *(existence d'éléments neutres).*

Démonstration. exercice. □

A.3 Exercices sur l'annexe A

Raisonnement

Exercice A.1 Trouver mon âge sachant que dans 20 ans, j'aurai le double de l'âge que j'avais il y a 10 ans. Il faut évidement justifier votre réponse !

Exercice A.2 Parmi les énoncés suivants, lequel est la négation de ≪ les éléphants ne sont pas tous roses ≫ : (a) il y a un éléphant rose ; (b) il existe un éléphant gris ; (c) tous les éléphants sont roses ; (d) il y a un éléphant qui n'est pas rose.
Lequel lui est équivalent ? Pourquoi ?

Exercice A.3 Écrire la négation des propositions suivantes, où $x, y \in \mathbb{R}$.
(a) $x > y$; (b) $x \geq y$; (c) $x > y$ ou $x < y$; (d) $x \neq y$.

Exercice A.4 Écrire la contraposée des implications suivantes :
(a) $P \Longrightarrow Q$;
(b) $P \Longrightarrow \text{non}(Q)$;
(c) $\text{non}(P) \Longrightarrow Q$;
(d) tous les chats sont gris ;
(e) chaque sport est bon pour la santé ;
(f) aucune hirondelle ne fait le printemps.

Exercice A.5 Ce soir aura lieu la 6eme partie de la série finale de la Coupe Stanley, qui oppose les Canadiens de Montréal aux Stars de Dallas. Le score actuel dans la série est de 3 parties à 2 en faveur des Canadiens. On considère les propositions suivantes :
A : Les Canadiens remportent la 6eme partie.
B : Les Canadiens remportent la Coupe Stanley.
Que peut-on dire des 4 propositions suivantes :
(1) $B \Longrightarrow A$; (2) $A \Longrightarrow B$; (3) $\text{non}(B) \Longrightarrow \text{non}(A)$;
(4) $\text{non}(A) \Longrightarrow \text{non}(B)$.
On rappelle que le vainqueur de la Coupe est celui qui remporte le premier 4 parties de la série finale, et qu'il n'y a pas de parties nulles.

Les ensembles

$\boxed{\textbf{Exercice A.6}}$ Répondre par vraie ou faux aux questions suivantes. Justifier votre réponse.
(1) $\{4,1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,3,2,1\}$; (2) $\{4,1,2,3\} \neq \{1,2,3,4,3,2,1\}$;
(3) $\emptyset \subseteq \{a,b,f,g\}$; (4) $\emptyset \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$; (5) $\emptyset \subseteq \emptyset$; (6) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$;
(7) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$; (8) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$; (9) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

$\boxed{\textbf{Exercice A.7}}$ Soit $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$ et $C=\{2,3,4,5\}$. Ecrire les ensembles suivants :
(a) $\mathcal{P}(A)$; (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$; (c) $A \setminus B$; (d) $B \setminus A$; (e) B^c dans C ; (f) $C \setminus A$;
(g) $C \setminus B$; (h) $A \setminus C$; (i) $B \setminus C$.

$\boxed{\textbf{Exercice A.8}}$ Soit A et B deux ensembles. Montrer que :

1. Si $A \subseteq B$ alors $A \cup A^c = B$, $A^c \cap A = \emptyset$, $\emptyset^c = B$ et $B^c = \emptyset$. Ici, $A^c = B \setminus A$.
2. $A \subseteq B$ si et seulement si $A \cap B = A$.

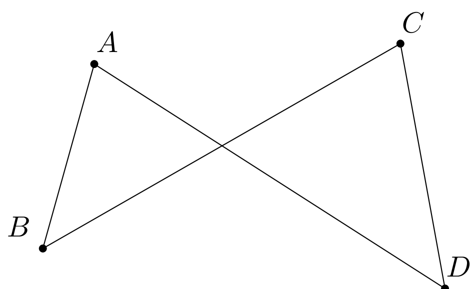
Exercice A.9 (Lois de Morgan) Soit $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$ des ensembles. Montrer que :
(a) $(A^c)^c = A$; (b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; (c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Annexe B

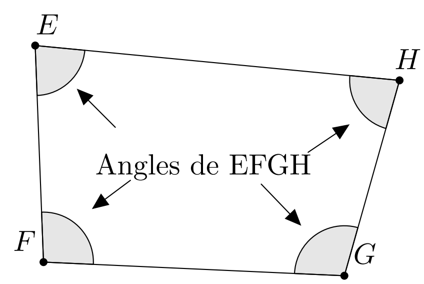
Rappels de géométrie

B.1 Parallélogrammes, carrés et rectangles

Un quadrilatère est la donnée de quatre points $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ non alignés. Un quadrilatère $ABCD$ est dit convexe si ses côtés ne se coupent pas.

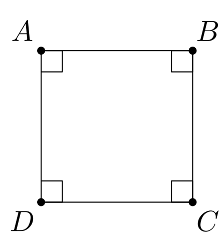


ABCD n'est pas convexe,
car $[AD]$ et$[BC]$ se croisent.



Propriété : La somme des angles d'un quadrilatère convexe est de $0 = 2\pi$.

Définition. Un carré est un parallélogramme dont les côtés sont tous égaux et dont les angles sont égaux.

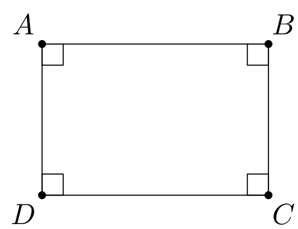


Aire $= AB^2$

Propriétés :

(i) Les angles d'un carré sont égaux à $\pi/2$ (angle droit).
(ii) $ABCD$ est un carré $\Longleftrightarrow$ ses diagonales sont de même longueur et sont perpendiculaires.

Définition. Un rectangle est un parallélogramme dont un angle est droit.



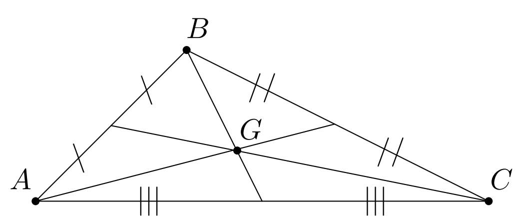
Aire $= AB \cdot BC$

Proposition B.1. *Un parallélogramme est un rectangle $\Longleftrightarrow$ les diagonales sont de même longueur.*

B.2 Triangles

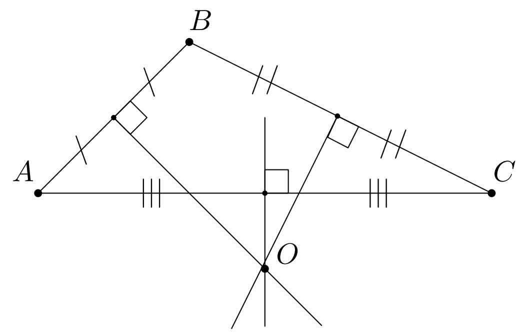
Définition. Soit ABC un triangle,

- La somme des angles de ce triangle est π
- On appelle médianes de ABC les trois droites passant par un sommet et par le milieu de côté opposé.



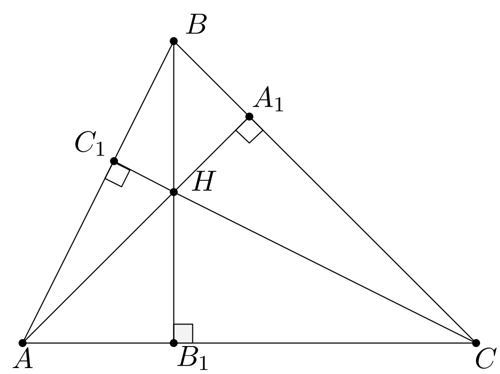
Proposition B.2. *Les médianes de ABC sont concourantes (i.e. elles se coupent toutes au même point). Ce point d'intersection est le centre de gravité de ABC, noté G*

Définition. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de AB.



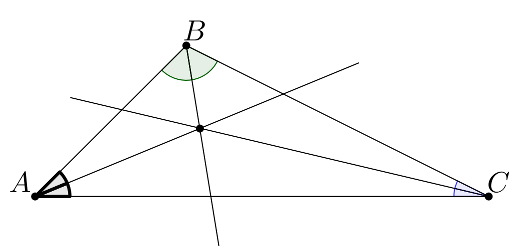
Proposition B.3. *Les médiatrices de ABC se coupent en le centre du cercle circonscrit au triangle ABC noté O.*

Définition. On appelle hauteurs de ABC les trois droites passant par un sommet et perpendiculaires au côté opposé.



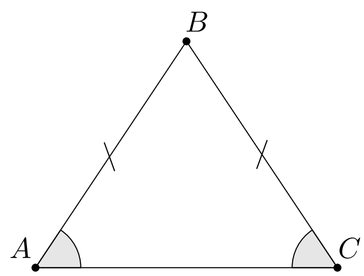
Proposition B.4. *Les hauteurs de ABC sont concourantes en l'orthocentre H.*

Définition. On appelle bissectrices de ABC les trois droites issues des sommets et partageant les angles en deux.



Proposition B.5. *Les bissectrices de ABC sont concourantes en le centre du cercle inscrit.*

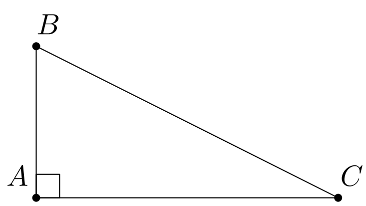
Définition. Un triangle est isocèle si :
(i) deux côtés sont de même longueur $\Longleftrightarrow$ (ii) deux angles ont la même mesure.



Triangle isocèle en B

Définition. Un triangle est équilatéral si :
(i) trois côtés sont de même longueur $\Longleftrightarrow$ (ii) trois angles ont la même mesure.

Définition. Un triangle est rectangle s'il a un angle droit.



Triangle rectangle en A

Bibliographie

[Audin 2006] M. AUDIN *Géométrie*, EDP Sciences (2006).

[Damphousse 2002] P. DAMPHOUSSE, *L'arithmétique ou l'art de compter*, Quatre à quatre, Édition le Pommier (2002).

[Liret et Martinais 2003] F. LIRET ET D. MARTINAIS, *Algèbre 1re année, 2e édition*, Dunod (2003).

[Rittaud 2000] B. RITTAUD, *La géométrie classique*, Quatre à quatre, Édition le Pommier (2000).

[Smullyan 1997] R. SMULLYAN, *Le livre qui rend fou*, Dunod (1997).

[XMaths] Les cours de mathématiques disponibles sur `http ://xmaths.free.fr/TS/index.htm`.